

Dynamik des Strahlungszufalls angeregter Atome

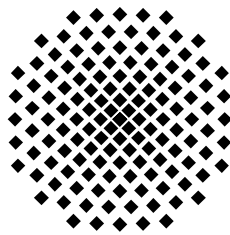
Dynamics of the radiative decay of excited atoms

Diplomarbeit von
Niels Patriz Benedikter

im Fach
Physik

10. Februar 2011

Hauptberichter: Prof. Dr. Marcel Gieseher
Mitberichter: Prof. Dr. Jürg Fröhlich (ETH Zürich)
Prof. Dr. Günter Wunner



Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	3
1.1. Das Modell: Nichtrelativistische Quantenelektrodynamik	3
1.2. Fragestellung: Relaxation in den Grundzustand	5
1.3. Übersicht über die Ergebnisse	6
2. Potenzgesetz für die Relaxation in den Grundzustand	9
2.1. Leitfaden für die Abschätzung	9
2.2. Abschätzung der Relaxation durch ein Potenzgesetz	10
3. Uniforme Ausbreitungsabschätzung für Photonen	21
3.1. Übertragung der Perry-Abschätzung	21
3.2. Emissionsamplituden in Störungstheorie und ein-/auslaufende Photonen .	25
3.2.1. Entwicklung des Matrixelements nach der Feinstrukturkonstante .	26
3.2.2. Matrixelement ausgedrückt durch die Mellin-Transformation . . .	27
4. Der harmonische Oszillator mit Kopplung ans quantisierte Feld	33
4.1. Lösung in der klassischen Elektrodynamik	34
4.1.1. Abschätzung der Relaxationsrate	43
4.2. Relaxation im quantenelektrodynamischen Modell	48
5. Störungsentwicklung von Rayleigh-Streuamplituden	55
5.1. Duhamel-Entwicklung des Propagators	56
5.2. Entwicklung der Streuamplituden	57
6. Zeitabhängige Schranke für die Photonenzahl	63
A. Zweite Quantisierung	69
A.1. Fockraum und Zweite Quantisierung	69
A.2. Zur Definition des quantisierten Vektorpotentials	70
A.3. Notation	71
Symbolverzeichnis	73

1. Einführung

Die physikalische Erfahrung zeigt, dass angeregte Atome und Moleküle unter Emission von Photonen in ihren Grundzustand übergehen. In dieser Arbeit untersuchen wir im Rahmen der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik mathematisch rigoros die Geschwindigkeit dieses Übergangs. Weitere Ergebnisse sind eine asymptotische Störungsentwicklung von Rayleigh-Streuamplituden frei von Infrarot-Divergenzen und eine störungstheoretische Abschätzung der Anzahl durch (spontane) Emission erzeugter Photonen.

In diesem Kapitel erklären wir zunächst die nichtrelativistische Quantenelektrodynamik, dann diskutieren wir die zentralen Fragestellungen dieser Arbeit und geben schließlich einen Überblick über unsere Ergebnisse. Mathematische Grundlagen und unsere Notation sind in Anhang A erklärt.

1.1. Das Modell: Nichtrelativistische Quantenelektrodynamik

Wir betrachten ein einzelnes Elektron ohne Spin mit nichtrelativistischer Dispersionsrelation gebunden an einen oder mehrere statische Atomkerne. Das Elektron wechselwirkt außerdem mit dem quantisierten elektromagnetischen Feld \mathbf{A} in Coulomb-Eichung. Dieses System wird beschrieben durch den Hamilton-Operator [GZ09b]

$$H_\alpha = \left(\mathbf{p} + \alpha^{3/2} \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) \right)^2 + V + H_f, \quad (1.1)$$

wobei $\alpha \geq 0$ die Feinstrukturkonstante ist und H_f die Energie des quantisierten elektromagnetischen Feldes. Durch die Coulomb-Eichung tritt das skalare Potential V ohne Retardierung auf. Zur Diskussion der Einheitenwahl siehe z. B. [Gri06].

Der Hilbertraum des Systems ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}$ mit dem Raum der Ein-Elektron-Zustände in Ortsdarstellung $\mathcal{H}_{\text{el}} = L^2(\mathbb{R}^3)$ und dem symmetrischen (d. h. bosonischen) Fockraum \mathcal{F} über dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ der Photonenzustände in Impulsdarstellung. Der Freiheitsgrad $\lambda \in \{1, 2\}$ entspricht der Helizität des Photons. Wir heben hervor, dass das Elektron in erster Quantisierung beschrieben ist.

Weiter ist \mathbf{p} der Impulsoperator des Elektrons und $H_f = \text{d}\Gamma(\omega)$ die Feldenergie, mit der Photondispersionsrelation $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$ als Multiplikationsoperator. Das quantisierte elektromagnetische Feld $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x})$ ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_\alpha) + a^*(\mathbf{G}_\alpha), \quad \text{mit } \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\kappa(\mathbf{k})}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.2)$$

Dabei sind für $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ die $a(f) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \overline{f(\mathbf{k}, \lambda)} a(\mathbf{k}, \lambda) d^3\mathbf{k}$ Vernichtungsoperatoren und die $a^*(f) = \sum_{\lambda=1}^2 \int f(\mathbf{k}, \lambda) a^*(\mathbf{k}, \lambda) d^3\mathbf{k}$ Erzeugungsoperatoren mit den kanonischen Kommutatorrelationen (CCR) in Distributions-Schreibweise

$$[a(\mathbf{k}, \lambda), a^*(\mathbf{k}', \lambda')] = \delta_{\lambda, \lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}, \lambda), a(\mathbf{k}', \lambda')] = 0 = [a^*(\mathbf{k}, \lambda), a^*(\mathbf{k}', \lambda')].$$

Die \mathbf{x} -Abhängigkeit ist wie ein Multiplikationsoperator bezüglich der Elektronkoordinate zu lesen; die strenge Definition ist im Anhang A.2 zu finden.

Die Funktion κ ist ein Ultraviolett-Cutoff. Wir machen für die ganze Arbeit folgende Voraussetzungen an κ und ergänzen diese je nach Kapitel unterschiedlich:

Voraussetzungen. *Es sei κ eine reellwertige rotationsinvariante Funktion mit*

$$\int \left| \frac{\kappa(\mathbf{k})}{\sqrt{\omega(\mathbf{k})}} \right|^2 \left(1 + \frac{1}{\omega(\mathbf{k})}\right) d^3\mathbf{k} < \infty, \quad \text{d. h. } \frac{\kappa}{\sqrt{\omega}} \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3).$$

Außerdem sei κ Borel-messbar und $\kappa\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Dies sind keine starken Einschränkungen, denn z. B. ein beschränktes $\kappa \in L^2(\mathbb{R}^3)$ mit $\kappa = 1$ auf einer Umgebung von $\mathbf{k} = 0$ erfüllt $\kappa/\sqrt{\omega} \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3)$. Wir benötigen keinen Infrarot-Cutoff.

Die Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \perp \mathbf{k}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \mu) = \delta_{\lambda, \mu}$ ($\lambda, \mu \in \{1, 2\}$) haben die Bedeutung transversaler Polarisationsvektoren. Die Polarisationsvektoren seien als Funktionen von \mathbf{k} Lebesgue-messbar. Es sei angemerkt, dass ein solches Vektorfeld nach dem Satz vom Igel nicht stetig sein kann und wir Regularitätsforderungen daher statt an $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ meist an $\boldsymbol{\varepsilon}f$ (Definition siehe Gl. (A.3)) stellen müssen.

Falls $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ als Multiplikationsoperator infinitesimal beschränkt ist bzgl. $-\Delta$ (damit meinen wir „infinitesimally operator bounded“), so ist H_α mit Definitionsbereich $D(\mathbf{p}^2 + H_f)$ ein selbstadjungierter Operator [HH08]. Darüber hinaus ist H_α dann wesentlich selbstadjungiert auf jedem definierenden Bereich von $\mathbf{p}^2 + H_f$. Außer für den Harmonischen Oszillator (Kapitel 4) verwenden wir immer diese Definition des Hamilton-Operators.

Einige Autoren definieren einen selbstadjungierten Hamilton-Operator über die Friedrichserweiterung. Da ein wesentlich selbstadjungierter Operator genau eine selbstadjungierte Erweiterung besitzt, stimmt die Friedrichserweiterung mit der Definition von Hasler und Herbst [HH08] überein.

Falls $V_- := \max\{-V, 0\}$ bzgl. $-\Delta$ infinitesimal form-beschränkt, $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V_-(\mathbf{x}) = 0$ und $\inf \sigma(-\Delta + V)$ ein negativer isolierter Eigenwert von $H_{\text{el}} = -\Delta + V$ mit Vielfachheit 1 ist, dann ist $E_\alpha = \inf \sigma(H_\alpha) > -\infty$ ein Eigenwert des Hamilton-Operators H_α [GLL01]. Einen der normierten Eigenvektoren zu E_α nennen wir *Grundzustand* ψ_α . Im Falle $\alpha = 1$ schreiben wir $E = E_\alpha$ und $\psi_g = \psi_\alpha$.

Falls $V = V_+ - V_-$ mit $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und V_- bzgl. $-\Delta$ infinitesimal form-beschränkt ist, so ist der Eigenraum zum Eigenwert E_α eindimensional [Hir00], der Grundzustand ψ_α also bis auf eine Phase eindeutig. (Hier gehen die Voraussetzungen an κ besonders ein.)

Um Multiplikationsoperatoren (Multiplikation mit einer Funktion der Elektronkoordinate) abzuschätzen ist die exponentielle räumliche Lokalisierung des Grundzustandes nützlich: für $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und V_- bzgl. $-\Delta$ infinitesimal beschränkt fällt jeder energetisch unterhalb der sogenannten Ionisierungsschwelle Σ liegende Zustand bzgl. der Elektronkoordinate exponentiell ab, d. h. für $\lambda + \beta^2 < \Sigma$ ist $\|e^{\beta|\mathbf{x}}\chi(H < \lambda)\| < \infty$ [Gri04].

Wir werden in jedem Kapitel die jeweils benötigten Voraussetzungen ans Potential aufführen. Alle hier genannten Bedingungen an V werden z. B. vom Coulomb-Potential einer endlichen Zahl statischer Kerne erfüllt.

Einen umfangreichen Überblick über Fragestellungen und Ergebnisse auf dem Gebiet der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik bieten [Spo04] und [Gri06].

Solange wir α nicht als Parameter für eine Störungsentwicklung benötigen, werden wir in dieser Arbeit den Hamilton-Operator (1.1) mit $\alpha = 1$ betrachten und schreiben dafür $H = H_\alpha$.

1.2. Fragestellung: Relaxation in den Grundzustand

Sei $\psi_0 \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{F}$ ein Zustand eines Atoms oder Moleküls, dessen Gesamtenergie nicht ausreicht, um das Elektron unendlich weit vom Kern zu entfernen, d. h. der Zustand liege energetisch unterhalb der *Ionisierungsschwelle* [Gri04]

$$\Sigma := \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\inf_{\varphi \in D_R, \|\varphi\|=1} \langle \varphi, H\varphi \rangle \right), \text{ mit } D_R := \{\varphi \in D(H) : \varphi(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } |\mathbf{x}| < R\}.$$

Wir vermuten durch die physikalische Beobachtung motiviert, dass ψ_0 unter der Zeitentwicklung e^{-iHt} in den Grundzustand übergeht, wobei Photonen emittiert werden, welche sich für $t \rightarrow \infty$ in großem Abstand vom Atom befinden und sich näherungsweise wechselwirkungsfrei ausbreiten. Durch $h_t = e^{-i\omega t}h$ wird die freie Zeitentwicklung eines Photons im Zustand $h \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ beschrieben. Mathematisch formuliert vermuten wir daher, dass ψ_0 sich als (evtl. unendliche) Linearkombination von Zuständen ψ_i , $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, schreiben lässt, für deren Zeitentwicklung gilt

$$\|e^{-iHt}\psi_i - a^*(h_{1,t}^i) \cdots a^*(h_{n_i,t}^i)e^{-iEt}\psi_g\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (1.3)$$

für geeignete Photonzustände $h_j^i \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$.

Die asymptotischen Erzeugungsoperatoren (und analog asymptotische Vernichtungsoperatoren) sind gegeben durch

$$a_+^*(h_1) \cdots a_+^*(h_n)\psi = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} a^*(h_{1,t}) \cdots a^*(h_{n,t})e^{-iHt}\psi.$$

Dieser Limes existiert für $h_1, \dots, h_n \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und ψ aus einem spektralen Unter-
raum $\chi(H \leq E_{\text{max}})\mathcal{H}$ mit einem beliebigen $E_{\text{max}} < \Sigma + \frac{1}{4\alpha^2}$ [GZ09a]. Diese Bedingung

heißt in unseren Einheiten, das Elektron ist auf Geschwindigkeiten strikt kleiner als Lichtgeschwindigkeit eingeschränkt. Die asymptotischen Erzeuger und Vernichter bilden eine Darstellung der kanonischen Kommutatorrelationen (CCR) mit Vakuum ψ_g [FGS02]. Für $t \rightarrow -\infty$ erhalten wir analog asymptotische Erzeuger und Vernichter $a_+^*(h)$ und $a_-(h)$.

Die Aussage „ ψ_0 ist unendliche Linearkombination von Zuständen, welche (1.3) erfüllen“ ist äquivalent zu

$$\psi_0 \in \overline{\text{span}}\{a_+^*(\underline{h})\psi_g : \underline{h} \in (L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^n, n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.4)$$

Die Vermutung, dass alle Zustände aus dem spektralen Unterraum $\chi(H < \Sigma)\mathcal{H}$ im Sinne von (1.4) in den Grundzustand übergehen, ist als Asymptotische Vollständigkeit der Rayleigh-Streuung bekannt. Ein Beweis existiert unter Annahme eines Infrarots-Cutoffs der Wechselwirkung von quantisiertem elektromagnetischem Feld und Elektronen oder für positive Photonmasse [FGS02]; ferner für harmonisches Potential $V(\mathbf{x}) \propto \mathbf{x}^2$ [Ara83] oder schwach gestörtes harmonisches Potential [Spo97].

Wir definieren die C^* -Algebra $\tilde{\mathcal{A}}$ der lokalisierten Observablen: Sei \mathcal{A} die C^* -Algebra erzeugt von allen endlichen Linearkombinationen von Weyl-Operatoren $W(f)$ mit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\varepsilon f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Sei $\tilde{\mathcal{A}}$ die C^* -Algebra erzeugt von den Operatoren $B \otimes A$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{el})$ und $A \in \mathcal{A}$. Als *Relaxation in den Grundzustand* bezeichnen wir die Konvergenz von Erwartungswerten gegen ihren Grundzustandswert, genauer [FGS01]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-iHt}\psi_0, Ae^{-iHt}\psi_0 \rangle = \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle \quad \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}. \quad (1.5)$$

Hauptziel unserer Arbeit ist, die Konvergenzgeschwindigkeit von (1.3) und (1.5) zu untersuchen.

Für Zustände ψ_0 mit (1.4) beweisen wir, dass (1.5) im Wesentlichen schneller als jede Potenz $\frac{1}{1+|t|^n}$ konvergiert (Kapitel 2); im harmonischen Potential und mit Dipolapproximation beweisen wir für Resonanzen des harmonischen Oszillators exponentielle Konvergenz von (1.3) bis auf einen Fehler in höherer Ordnung der Kopplungskonstante (Kapitel 4).

1.3. Übersicht über die Ergebnisse

Wir geben hier eine kurze Übersicht über die Arbeit. Zentrales Thema ist die Relaxationsgeschwindigkeit angeregter Zustände eines Atoms.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns unter Annahme asymptotischer Vollständigkeit der Rayleigh-Streuung mit der Konvergenzgeschwindigkeit von Erwartungswerten und etablieren dafür mittels der Methode der stationären Phase ein Potenzgesetz als Antwort auf die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit von (1.5). Dieses Resultat ist Theorem 2.2.12. Die Frage nach stärkeren Abschätzungen motiviert die Kapitel 3 und 4.

In Kapitel 3 diskutieren wir, ob sich die beim Übergang in den Grundzustand emittierten Photonen in einer Weise klassifizieren lassen, sodass ähnlich der Perry-Abschätzung

eine uniforme Konvergenzabschätzung möglich würde. Wir berechnen dazu das Matrixelement für die Emission eines Photons in führender Ordnung der Feinstrukturkonstante. Die Perry-Abschätzung können wir auf freie Photonen übertragen (Theorem 3.1.3), das Matrixelement (Theorem 3.2.3) deutet aber darauf hin, dass die Anwendung auf Photonenemission nicht aussichtsreich ist. Die Frage nach höheren Ordnungen einer Störungsentwicklung von Emissions- und Streuamplituden motiviert Kapitel 5.

In Kapitel 4 schränken wir uns auf den Fall eines harmonischen Potentials und Wechselwirkung in Dipolapproximation ein. In diesem Modell können wir die Heisenberg-Gleichungen mittels Laplace-Transformation lösen und erhalten eine exponentielle Abschätzung als Antwort auf die Frage nach der Konvergenzgeschwindigkeit von (1.3). Dieses Resultat ist Korollar 4.2.4.

In Kapitel 5 zeigen wir eine Störungsentwicklung von Rayleigh-Streuamplituden nach der Feinstrukturkonstante ohne Infrarot-Divergenzen. Das Verfahren orientiert sich an Ergebnissen von Bach, Fröhlich und Pizzo und ermöglicht gegenüber dem Vorgehen aus Kapitel 3 Matrixelemente bis zu beliebiger Ordnung der Feinstrukturkonstante als asymptotische Reihe zu entwickeln. Dieses Resultat ist Theorem 5.2.3 und der Beweis vereinfacht das Vorgehen von Bach et al. deutlich.

Kapitel 6 liegt etwas abseits der Hauptlinie der Arbeit. Wir beweisen eine zeitabhängige Schranke für die Anzahl der von einem Atom emittierten Photonen. Der Beweis verwendet eine zeitabhängige Aufteilung in Photonen hoher und niedriger Energie; da das Infrarot-Verhalten der Kopplung entscheidend für die erreichbare Schranke ist, verwenden wir eine Pauli-Fierz-Transformation um das Ergebnis zu optimieren. Dieses Resultat ist Theorem 6.1.

Anhang A fasst kurz die wichtigsten Definitionen der zweiten Quantisierung zusammen und erläutert die Definition des quantisierten Vektorpotentials sowie unsere Notation.

2. Potenzgesetz für die Relaxation in den Grundzustand

Wir verwenden in diesem Kapitel den Hamilton-Operator (1.1) für $\alpha = 1$, d. h. $H = (\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V + H_f$. Wir betrachten Zustände

$$\psi_0 \in \overline{\text{span}}\{a_+^*(\underline{h})\psi_g : \underline{h} \in (L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Es ist bekannt [FGS02], dass für ψ_0 Relaxation in den Grundzustand ψ_g gilt, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-iHt}\psi_0, Ae^{-iHt}\psi_0 \rangle = \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle \quad \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

In diesem Kapitel beweisen wir eine explizite Abschätzung der Relaxation durch ein Potenzgesetz beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}$:

$$|\langle e^{-iHt}\psi_0, Ae^{-iHt}\psi_0 \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle| \leq \frac{C_{m,\varepsilon}}{1 + |t|^m} + \varepsilon.$$

Dies ist die Aussage von Theorem 2.2.12.

2.1. Leitfaden für die Abschätzung

Zur Abschätzung der Relaxation in den Grundzustand orientieren wir uns am Konvergenzbeweis wie in [FGS01] [FGS02] ausgeführt. Wir geben eine kurze Skizze dieses Konvergenzbeweises als Leitfaden für unser Vorgehen bei der Abschätzung:

Der Zustand ψ_0 kann in der Norm approximiert werden durch Linearkombinationen von Vektoren der Form

$$\psi_+ = a_+^*(h_1) \cdots a_+^*(h_n)\psi_g = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} a^*(h_{1,t}) \cdots a^*(h_{n,t}) e^{-iHt} \psi_g.$$

Für solche Zustände erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-iHt}\psi_+, Ae^{-iHt}\psi_+ \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-i(H-E)t}\psi_+, Ae^{-i(H-E)t}\psi_+ \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a^*(\underline{h}_t)\psi_g, Aa^*(\underline{h}_t)\psi_g \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Weiter zeigt man $\lim_{t \rightarrow \infty} [a(\underline{h}_t), A] a^*(\underline{h}_t)\psi_g = 0$ (hierfür ist wichtig, dass A eine lokalisierte Observable ist) und folgert damit aus (2.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-iHt}\psi_+, Ae^{-iHt}\psi_+ \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle A^*\psi_g, a(\underline{h}_t)a^*(\underline{h}_t)\psi_g \rangle. \quad (2.2)$$

Ferner zeigt man $\lim_{t \rightarrow \infty} a(\underline{h}_t)\psi_g = 0$, damit folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} a(\underline{h}_t)a^*(\underline{h}_t)\psi_g &= \psi_g \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_g, a(\underline{h}_t)a^*(\underline{h}_t)\psi_g \rangle \\ &= \psi_g \lim_{t \rightarrow \infty} \langle a^*(\underline{h}_t)\psi_g, a^*(\underline{h}_t)\psi_g \rangle = \psi_g \langle \psi_+, \psi_+ \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt dann die Relaxation in den Grundzustand.

Im folgenden Kapitel zeigen wir mittels der CCR und der Methode der stationären Phase explizite Abschätzungen für die Teilschritte dieses Konvergenzargumentes und setzen diese dann zu Theorem 2.2.12 zusammen.

2.2. Abschätzung der Relaxation durch ein Potenzgesetz

Wir machen für dieses Unterkapitel folgende Voraussetzungen.

Voraussetzungen. *Es sei V infinitesimal beschränkt bezüglich $-\Delta$. Darüber hinaus sei V so beschaffen, dass ein (bis auf eine Phase) eindeutiger Grundzustand ψ_g existiert und dieser bzgl. der Elektronkoordinate $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ so abfällt, dass $\psi_g \in D(|\mathbf{x}|^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Außerdem sei $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Folgende Kommutatoridentität werden wir oft verwenden: Seien A_i , $i = 1 \dots N$, und B Operatoren auf \mathcal{H} . Überall, wo beide Seiten definiert sind, gilt:

$$\left[\prod_{i=1}^N A_i, B \right] = \sum_{i=1}^N A_1 \cdots A_{i-1} [A_i, B] A_{i+1} \cdots A_N. \quad (2.4)$$

Wir zitieren als folgendes Lemma einige Standardabschätzungen, welche wir auch in späteren Kapiteln häufig benötigen. Insbesondere hier geht $\kappa/\sqrt{\omega} \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3)$ ein. Das Lemma zeigt insbesondere, dass wir auf den Grundzustand beliebig viele Erzeuger von L^2_ω -Zuständen anwenden können; daher sind auch die Rechnungen mit Kommutatoren von Erzeugern und Vernichtern in diesem Kapitel problemlos durchführbar.

Lemma 2.2.1 ([GZ09a] [FGS01]).

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Operator $H_f^n(H+i)^{-n}$ beschränkt. Insbesondere liegt jeder Eigenvektor von H in $D(H_f^n)$.
2. Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante C , sodass für alle $h_1, \dots, h_N \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und alle $l \in \{1, \dots, N\}$ gilt:

$$\|a^\#(\underline{h}_t)(H_f + 1)^{-N/2}\| \leq C \prod_{m=1}^N \|h_m\|_\omega$$

$$\|a^\#(h_{1,t}) \cdots a^\#(h_{l-1,t})(\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}))a^\#(h_{l+1,t}) \cdots a^\#(h_{N,t})(H+i)^{-N}\| \leq C \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N \|h_m\|_\omega.$$

Das wichtigste Hilfsmittel in diesem Kapitel ist die Methode der stationären Phase:

Lemma 2.2.2 (Methode der stationären Phase [RS79, Theorem XI.14]). *Sei $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ und sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $\{\nabla\omega(\mathbf{k}) : \mathbf{k} \in \text{supp } u\} \subset G$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Konstante C , sodass*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)} u(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} \quad \forall \mathbf{x}, t \text{ mit } \mathbf{x}/t \notin G.$$

Die folgende Dichtheitseigenschaft ist nützlich, weil für Photonzustände g mit $\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ die Methode der stationären Phase anwendbar ist.

Lemma 2.2.3. *Sei $f \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\delta > 0$. Dann existiert $g \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ und $\|f - g\|_\omega < \delta$.*

Insbesondere ist der Raum der endlichen Linearkombinationen von Zuständen

$$a_+^*(\underline{g})\psi_g \quad \text{mit} \quad \underline{g} = (g_1, \dots, g_n), \quad n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon g_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3) \quad \forall i = 1 \dots n$$

dicht in $\overline{\text{span}}\{a_+^(\underline{h})\psi_g : \underline{h} \in (L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^N, N \in \mathbb{N}\}$.*

Beweis. Wir definieren $F := f\sqrt{1 + \frac{1}{\omega}}$. Nach Voraussetzung ist $F \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. Wir haben $\varepsilon F \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Es existiert $\mathbf{G}_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ mit

$$\|\varepsilon F - \mathbf{G}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)} < \delta.$$

Wir definieren die Projektion auf den transversalen Teil als 3×3 -Matrix in Komponenten:

$$P(\mathbf{k})_{ij} := \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

und definieren $\mathbf{G}_1(\mathbf{k}) := P(\mathbf{k})\mathbf{G}_0(\mathbf{k})$. Eine kurze Rechnung zeigt $P(\mathbf{k})\varepsilon F(\mathbf{k}) = \varepsilon F(\mathbf{k})$ (wie zu erwarten, da εF bereits transversal ist). Es folgt da $|P(\mathbf{k})\mathbf{v}|_{\mathbb{C}^3} \leq |\mathbf{v}|_{\mathbb{C}^3}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$:

$$\|\varepsilon F - \mathbf{G}_1\| = \|P(\varepsilon F - \mathbf{G}_0)\| \leq \|\varepsilon F - \mathbf{G}_0\| < \delta.$$

Wir definieren $G \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ durch

$$G(\mathbf{k}, \lambda) := \langle \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda), \mathbf{G}_1(\mathbf{k}) \rangle_{\mathbb{C}^3} = \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{G}_1(\mathbf{k}), \quad \forall \lambda \in \{1, 2\}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir sehen, dass $\varepsilon G = \mathbf{G}_1$ und definieren $g := \frac{1}{\sqrt{1+1/\omega}}G$, somit erhalten wir

$$\varepsilon g = \frac{1}{\sqrt{1+1/\omega}}\mathbf{G}_1,$$

was in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ liegt. G ist eine L^2 -Funktion, also ist g eine L_ω^2 -Funktion, und

$$\|f - g\|_\omega^2 = \|F - G\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})}^2 = \|\varepsilon F - \mathbf{G}_1\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)}^2 < \delta.$$

Für den Beweis des zweiten Teils des Lemmas verwenden wir, dass nach Lemma 2.2.1 via Einfügen von $(H_f + 1)^{-N/2}(H_f + 1)^{N/2}$ folgende Ungleichung gilt:

$$\|a_+^*(\underline{h})\psi_g\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{iHt} a_+^*(\underline{h}_t) e^{-iEt} \psi_g\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|a_+^*(\underline{h}_t) \psi_g\| \leq C \prod_{l=1}^N \|h_l\|_\omega. \quad \square$$

In den folgenden Lemmata beweisen wir die Abschätzungen entsprechend der Teilschritte des in Kapitel 2.1 skizzierten Konvergenzbeweises. Die Lemmata werden am Ende des Kapitels zu Theorem 2.2.12 zusammengesetzt.

Lemma 2.2.4. *Seien $f_q, g_\nu \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon f_q, \varepsilon g_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $\nu = 1 \dots l$, $q = 1 \dots p$ und sei $n \in \mathbb{N}$.*

Dann existiert eine Konstante C , so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left\| \left[\prod_{\nu=1}^l a(g_{\nu,t}), \prod_{q=1}^p a^*(f_q) \right] \Omega \right\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n}.$$

Beweis. Die Kommutatoridentität (2.4) liefert

$$\begin{aligned} \left[\prod_{\nu=1}^l a(g_{\nu,t}), \prod_{q=1}^p a^*(f_q) \right] \Omega &= \sum_{q=1}^p \sum_{\nu=1}^l a^*(f_1) \cdots a^*(f_{q-1}) a(g_{1,t}) \cdots a(g_{\nu-1,t}) \times \\ &\quad \times \underbrace{[a(g_{\nu,t}), a^*(f_q)]}_{= \langle g_{\nu,t}, f_q \rangle} a(g_{\nu+1,t}) \cdots a(g_{l,t}) a^*(f_{q+1}) \cdots a^*(f_p) \Omega \end{aligned}$$

und damit (der Hut $\widehat{}$ markiere einen ausgelassenen Faktor)

$$\begin{aligned} \left\| \left[\prod_{\nu=1}^l a(g_{\nu,t}), \prod_{q=1}^p a^*(f_q) \right] \Omega \right\| &\leq \sum_{q=1}^p \sum_{\nu=1}^l |\langle g_{\nu,t}, f_q \rangle| \times \\ &\quad \times \| a^*(f_1) \cdots a^*(f_{q-1}) a(g_{1,t}) \cdots \widehat{a(g_{\nu,t})} \cdots a(g_{l,t}) a^*(f_{q+1}) \cdots a^*(f_p) \Omega \|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Methode der stationären Phase haben wir $|\langle g_{\nu,t}, f_q \rangle| \leq \frac{C}{1 + |t|^n}$.

Unter Verwendung von $\|a^*(f)\varphi\| \leq \|f\| \|\sqrt{N}\varphi\|$ erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} &\| a^*(f_1) \cdots a^*(f_{q-1}) a(g_{1,t}) \cdots \widehat{a(g_{\nu,t})} \cdots a(g_{l,t}) a^*(f_{q+1}) \cdots a^*(f_p) \Omega \| \\ &\leq \|f_1\| \cdots \|f_{q-1}\| \|g_{1,t}\| \cdots \widehat{\|g_{\nu,t}\|} \cdots \|g_{l,t}\| \|f_{q+1}\| \cdots \|f_p\| \sqrt{(p+l)!}, \end{aligned}$$

und die L^2 -Norm ist zeitunabhängig: $\|g_{k,t}\| = \|g_k\|$ für alle $k = 1 \dots l$. \square

Wir wollen als nächstes eine Abschätzung (Lemma 2.2.6) von $\|a(\underline{g}_t)\psi_g\|$ beweisen. Das Vorgehen orientiert sich am Beweis von Lemma 26 in [FGS02]. Zum Beweis von Lemma 2.2.6 benötigen wir noch ein Lemma als Vorarbeit.

Lemma 2.2.5 ist intuitiv interpretierbar: Der Operator $d\Gamma(f)$ entspricht einem abgeschnittenen Anzahloperator, welcher Photonen mit Impuls kleiner $M/2$ nicht mitzählt. Die Anzahl höherenergetischer Photonen ist aber durch die Gesamtenergie beschränkt; dies legt $\psi_g \in D((d\Gamma(f) + 1)^m)$ nahe. Die Formel (2.5) zum Vorbeiziehen der Erzeuger und die Abschätzung für die Vernichter liegen ebenfalls nahe, da alle Photonen in \underline{g} nach Konstruktion von f durch den abgeschnittenen Anzahloperator genau wie vom Anzahloperator $N = d\Gamma(1)$ gezählt werden.

Lemma 2.2.5 (Vorarbeit zu Lemma 2.2.6). Sei $\underline{g} = (g_1, \dots, g_m) \in (L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^m$ und $\varepsilon g_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1, \dots, m$. Definiere

$$M := \min_{i=1, \dots, m} \inf \{|\mathbf{k}| : \exists \lambda \in \{1, 2\} \text{ mit } g_i(\mathbf{k}, \lambda) \neq 0\}; \text{ es ist } M > 0.$$

Wähle eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ mit $f(\mathbf{k}) = 0$ für $|\mathbf{k}| < M/2$ und $f(\mathbf{k}) = 1$ für $|\mathbf{k}| \geq M$.

Dann ist $\psi_g \in D((d\Gamma(f) + 1)^m)$ und

$$\|a(\underline{g}_t)(d\Gamma(f) + 1)^{-m/2}\| \leq C_m \|g_1\|_2 \cdots \|g_m\|_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gilt die Pullthrough-Formel

$$a(\underline{g}_t)(d\Gamma(f) + 1)^{-m} = (d\Gamma(f) + 1 + m)^{-m} a(\underline{g}_t). \quad (2.5)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst $\psi_g \in D((d\Gamma(f) + 1)^m)$. Nach Lemma 2.2.1 ist $(H + i)^{-m} \mathcal{H} \subset D((H_f + 1)^m)$. Es ist $f \leq T\omega$ für ein geeignet gewähltes $T > 0$. Es folgt $D((d\Gamma(T\omega) + T)^m) \subset D((d\Gamma(f) + 1)^m)$. Außerdem ist $D((d\Gamma(T\omega) + T)^m) = D((d\Gamma(\omega) + 1)^m)$. Wir haben also

$$(H + i)^{-m} (E + i)^m \psi_g \in D((H_f + 1)^m) = D((d\Gamma(T\omega) + T)^m) \subset D((d\Gamma(f) + 1)^m).$$

Zum Beweis der Abschätzung: Mit der Methode aus dem Beweis von Lemma 17 in [FGS01] reduzieren wir unter Verwendung des Kommutators $[d\Gamma(f), a(g_{j,t})] = a(g_{j,t})$ das Problem darauf, $\|(d\Gamma(f) + 1)^{-1/2} a(g_{j,t})\| \leq C \|g_j\|_2$ und $\|a(g_{j,t})(d\Gamma(f) + 1)^{-1/2}\| \leq C \|g_j\|_2$ zu zeigen.

Der Beweis von $\|a(g_{j,t})(d\Gamma(f) + 1)^{-1/2}\| \leq C \|g_j\|_2$ erfolgt analog zum Beweis von Lemma 1(b) in [HH08]. Wie dort zeigen wir auch $\|a^*(g_{j,t})(d\Gamma(f) + 1)^{-1/2}\| \leq C \|g_j\|_2$, woraus mit $\|B^*\| = \|B\|$ (für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$) die zu zeigende Abschätzung $\|(d\Gamma(f) + 1)^{-1/2} a(g_{j,t})\| \leq C \|g_j\|_2$ folgt.

Zum Beweis der Pullthrough-Formel genügt es zu zeigen, dass

$$(d\Gamma(f) + 1 + 1)a(g_i)\varphi = a(g_i)(d\Gamma(f) + 1)\varphi$$

für alle $i = 1, \dots, m$ und $\varphi = \varphi^{(n)} = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$. Mit der Beobachtung $\langle g_i, f\varphi_j \rangle = \langle f g_i, \varphi_j \rangle = \langle g_i, \varphi_j \rangle \forall i, j$ sehen wir die Gleichheit, wenn wir $d\Gamma(f) \upharpoonright \bigotimes^n L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes f \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}$ und die Definition des Vernichters einsetzen. \square

Nun können wir die angekündigte Abschätzung von $\|a(\underline{g}_t)\psi_g\|$ zeigen. Mit $\mathcal{H}_{\text{approx}}$ bezeichnen wir den Unterraum von \mathcal{H} bestehend aus endlichen Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{N_g} c_i \varphi_i \otimes \eta_i$ mit $c_i \in \mathbb{C}$, $\varphi_i \in \mathcal{H}_{\text{el}}$, $\eta_i \in \mathcal{F}_0$, wobei in $\eta_i = (\eta_i^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ alle $\eta_i^{(j)}$ endliche Linearkombinationen von Vektoren $a^*(f_1) \cdots a^*(f_j)\Omega$ mit $\varepsilon f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ sind. Wir sehen leicht, dass $\mathcal{H}_{\text{approx}}$ dicht in \mathcal{H} ist.

Lemma 2.2.6. Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\underline{g} = (g_1, \dots, g_m) \in (L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^m$ und $\varepsilon g_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1 \dots m$. Dann existiert eine Konstante C , sodass

$$\|a(\underline{g}_t)\psi_g\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin: Sei $\underline{h} \in (L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^l$ und $\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$, dann existiert eine Konstante C , sodass

$$\|a^\#(\underline{h}_t)a(g_t)\psi_g\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Definiere M und f wie in Lemma 2.2.5.

Sei $\delta > 0$. Wir approximieren den Vektor $(d\Gamma(f) + 1)^m \psi_g \in \mathcal{H}$ durch einen Zustand $\sum_{i=1}^{N_g} c_i \varphi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H}_{\text{approx}}$: $\|(d\Gamma(f) + 1)^m \psi_g - \sum_{i=1}^{N_g} c_i \varphi_i \otimes \eta_i\| < \delta$.

Dann können wir durch Einfügen von $-\sum_i c_i \varphi_i \otimes \eta_i + \sum_i c_i \varphi_i \otimes \eta_i$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \|a(\underline{g}_t)\psi_g\| &= \|a(\underline{g}_t)(d\Gamma(f) + 1)^{-m}(d\Gamma(f) + 1)^m \psi_g\| \\ &\leq C \|g_1\|_2 \cdots \|g_m\|_2 \|(d\Gamma(f) + 1)^{-m/2}\| \delta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$+ \|a(\underline{g}_t)(d\Gamma(f) + 1)^{-m} \sum_{i=1}^{N_g} c_i \varphi_i \otimes \eta_i\|. \quad (2.7)$$

Der erste Term (2.6) ist zeitunabhängig, und lässt sich beliebig klein machen indem δ ausreichend klein gewählt wird. Wir geben eine Abschätzung für den Term (2.7) an. Unter Verwendung von Gl. (2.5) haben wir

$$\|a(\underline{g}_t)(d\Gamma(f) + 1)^{-m} \sum_{i=1}^{N_g} c_i \varphi_i \otimes \eta_i\| \leq \sum_{i=1}^{N_g} \|c_i \varphi_i\| \|(d\Gamma(f) + 1 + m)^{-m}\| \|a(\underline{g}_t)\eta_i\|.$$

Es genügt also $\|a(\underline{g}_t)\eta_i\|^2 = \sum_{p=0}^{L_i} \|a(\underline{g}_t)\eta_i^{(p)}\|^2$ abzuschätzen (es ist $L_i < \infty$, da $\eta_i \in \mathcal{F}_0$). Nach Definition von $\mathcal{H}_{\text{approx}}$ ist

$$\eta_i^{(p)} = \sum_{j=1}^{N_{ip}} d_{jp}^i a^*(f_j^{i1}) \cdots a^*(f_j^{ip}) \Omega = \sum_{j=1}^{N_{ip}} d_{jp}^i a^*(\underline{f}_j^i) \Omega$$

mit $d_{jp}^i \in \mathbb{C}$ für $j = 1 \dots N_{ip}$, $p = 0 \dots L_i$, $i = 1 \dots N_g$ und es sind alle $\varepsilon f_j^{il} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$. Wir setzen diesen Ausdruck in $\|a(\underline{g}_t)\eta_i^{(p)}\|$ ein und schätzen ab

$$\|a(\underline{g}_t)\eta_i^{(p)}\| = \|a(\underline{g}_t) \sum_{j=1}^{N_{ip}} d_{jp}^i a^*(\underline{f}_j^i) \Omega\| \leq \sum_{j=1}^{N_{ip}} |d_{jp}^i| \|a(\underline{g}_t) a^*(\underline{f}_j^i) \Omega\| \quad (2.8)$$

$$\leq \max_{i,j,p} (N_{ip} |d_{jp}^i|) \| [a(\underline{g}_t), a^*(\underline{f}_j^i)] \Omega \| \stackrel{\text{Lm. 2.2.4}}{\leq} \frac{C}{1 + |t|^n}. \quad (2.9)$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $a(g_{\nu,t})\Omega = 0$ für alle $\nu = 1, \dots, m$, und dass das Maximum endlich ist, da i, j und p nur endlich viele Werte annehmen.

Für die zweite Abschätzung des Lemmas verwenden wir Cauchy-Schwarz:

$$\|a^\#(\underline{h}_t)a(g_t)\psi_g\|^2 \leq \left\| \left(a^\#(\underline{h}_t) \right)^* a^\#(\underline{h}_t)a(g_t)\psi_g \right\| \|a(g_t)\psi_g\|.$$

Lemma 2.2.1 zeigt, dass der erste Faktor eine t -unabhängige Schranke besitzt. Den zweiten Faktor haben wir oben abgeschätzt. \square

Im folgenden Lemma betrachten wir nur den Fall $n_i \geq n_j$. Für den Fall $n_i < n_j$, siehe Lemma 2.2.10.

Lemma 2.2.7. *Seien $h_k^i \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1 \dots N$ und $k = 1 \dots n_i$. Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.*

Angenommen $n_i \geq n_j$, dann existiert eine Konstante C , sodass

$$\|a(\underline{h}_t^i)a^*(\underline{h}_t^j)\psi_g - \psi_g \langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i)a^*(\underline{h}_t^j)\psi_g \rangle\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir geben einen Beweis durch Induktion in n_j . Wir verwenden als abgekürzte Notation $a^*(\underline{h}_t^j) = a^*(h_{1,t}^j) \cdots a^*(h_{n_j,t}^j) = a_1^* \cdots a_{n_j}^*$.

Induktionsanfang: Sei $n_j = 0$. Falls $n_i = 0$ ist der Ausdruck $= 0$, denn ψ_g ist normiert. Falls $n_i \neq 0$, dann haben wir

$$\|a_1 \cdots a_{n_i} \psi_g - \psi_g \langle \psi_g, a_1 \cdots a_{n_i} \psi_g \rangle\| \leq \|a_1 \cdots a_{n_i} \psi_g\| + \|\psi_g\| \|\psi_g\| \|a_1 \cdots a_{n_i} \psi_g\|,$$

was wir mit Lemma 2.2.6 abschätzen können.

Induktionsschritt: Sei $n_j > 0$. Durch Ausschreiben von Kommutatoren haben wir

$$\begin{aligned} & \|a(\underline{h}_t^i)a^*(\underline{h}_t^j)\psi_g - \psi_g \langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i)a^*(\underline{h}_t^j)\psi_g \rangle\| \\ & \leq \|a^*(\underline{h}_t^j)a(\underline{h}_t^i)\psi_g - \psi_g \langle \psi_g, a^*(\underline{h}_t^j)a(\underline{h}_t^i)\psi_g \rangle\| \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{k=1}^{n_i-1} \sum_{l=1}^{n_j} \|a_1 \cdots a_{k-1} a_1^* \cdots \widehat{a_l^*} \cdots a_{n_j}^* a_{k+1} \cdots a_{n_i} \psi_g \\ & - \psi_g \langle \psi_g, a_1 \cdots a_{k-1} a_1^* \cdots \widehat{a_l^*} \cdots a_{n_j}^* a_{k+1} \cdots a_{n_i} \psi_g \rangle\| \| [a_l^*, a_k] \| \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{l=1}^{n_j} \|a_1 \cdots a_{n_i-1} a_1^* \cdots \widehat{a_l^*} \cdots a_{n_j}^* \psi_g - \psi_g \langle \psi_g, a_1 \cdots a_{n_i-1} a_1^* \cdots \widehat{a_l^*} \cdots a_{n_j}^* \psi_g \rangle\| \| [a_l^*, a_{n_i}] \|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Kommutatoren sind t -unabhängige komplexe Zahlen. In den Zeilen (2.10) und (2.11) können wir die Abschätzung aus Lemma 2.2.6 anwenden. In Zeile (2.12) hat sich die Anzahl der Erzeugungsoperatoren um einen verringert, wir können somit die Induktionsannahme anwenden. \square

Wir übernehmen eine Abschätzung für die Konvergenz gegen die asymptotischen Erzeugungsoperatoren aus [GZ09b]. Zum Beweis wird die abzuschätzende Differenz als Integral über die Ableitung geschrieben und der in der Ableitung auftretende Kommutator mittels der Methode der stationären Phase und unter Benutzung des räumlichen Abfalls des Grundzustandes abgeschätzt. Dieses Vorgehen ist durch das Cook-Argument zum Beweis der Existenz der asymptotischen Vernichter und Erzeuger motiviert.

Lemma 2.2.8 ([GZ09b]). *Sei $\psi = \sum_{i=1}^N c_i a_+^*(\underline{h}^i) \psi_g$ mit $h_k^i \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$, $c_i \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n_i$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Dann existiert eine Konstante C , sodass für alle $i = 1 \dots N$ gilt:

$$\|e^{-iHt} a_+^*(\underline{h}^i) \psi_g - a^*(\underline{h}_t^i) e^{-iEt} \psi_g\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} \quad \forall t > 0 \quad (2.13)$$

und

$$|\langle e^{-iHt} \psi, A e^{-iHt} \psi \rangle - \sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, A a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} \quad \forall t > 0.$$

Beweis. Für (2.13) siehe [GZ09b]: der Beweis von Proposition 3.5 dort geht für beliebig große α (insbesondere $\alpha = 1$) durch, wenn wir uns mit einer Konstante $C = C(\alpha)$ begnügen ohne deren α -Abhängigkeit kontrollieren zu wollen. (Da der Beweis die Methode der stationären Phase zur Abschätzung von $|\langle \mathbf{G}_x, h_t \rangle|$ verwendet, ist hier $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ von Nutzen. Die in [GZ09b] stärkeren Voraussetzungen an das Potential sind für den Beweis dieses Lemmas nicht notwendig.)

Die zweite Abschätzung folgt leicht aus der ersten. \square

Zu (2.13) ist anzumerken, dass die Konstante von den Photonzuständen h_j^i abhängt. Dies lässt sich wie folgt einsehen. Zu einem Photonzustand h erhalten wir gemäß (2.13) eine Konstante $C = C(h)$, die wir als möglichst klein annehmen. Wir betrachten nun den um $\Delta t > 0$ zeitlich zurückversetzten Zustand $g = h_{-\Delta t}$. Der Zustand g kann „erst um Δt später konvergieren“; in der gleichen Form abgeschätzt ist daher zu erwarten, dass die Konstante $C(g)$ dafür größer ist.

Lemma 2.2.9. *Seien $h_k^i \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1 \dots N$, $k = 1 \dots n_i$. Sei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{el})$ und sei $W(f) = e^{i\phi(f)}$ ein Weyl-Operator mit $\varepsilon f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A = B \otimes W(f)$.*

Dann existiert eine Konstante C , sodass

$$|\langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, A a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle - \langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir benutzen $[a(h_{j,t}^i), W(f)] = \frac{i}{\sqrt{2}} \langle h_{j,t}^i, f \rangle W(f)$. Die Methode der stationären

Phase liefert $|\langle h_{j,t}^i, f \rangle_{L^2}| \leq C(1 + |t|^n)^{-1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} & |\langle \psi_g, B \otimes [a(\underline{h}_t^i), W(f)] a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \\ &= |\langle \psi_g, B \otimes \sum_{j=1}^{n_i} a(h_{1,t}^i) \cdots a(h_{j-1,t}^i) \frac{i}{\sqrt{2}} \langle h_{j,t}^i, f \rangle W(f) a(h_{j+1,t}^i) \cdots a(h_{n_i,t}^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \\ &\leq \frac{C}{1 + |t|^n} \sum_{j=1}^{n_i} |\langle \psi_g, B \otimes \left(a(h_{1,t}^i) \cdots a(h_{j-1,t}^i) W(f) a(h_{j+1,t}^i) \cdots a(h_{n_i,t}^i) a^*(\underline{h}_t^j) \right) \psi_g \rangle|. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Beschränktheit von B und $W(f)$ finden wir eine zeitunabhängige obere Schranke für die Summanden.

Die Aussage des Lemmas folgt nun sofort, da $|\langle \psi_g, B \otimes [a(\underline{h}_t^i), W(f)] a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle|$ gerade die abzuschätzende Differenz ist. \square

Im folgenden Lemma betrachten wir nur den Fall $n_i < n_j$; für $n_i \geq n_j$, siehe Lemma 2.2.7.

Lemma 2.2.10. *Seien $h_k^i \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für $i = 1 \dots N$, $k = 1 \dots n_i$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $A = B \otimes W(f)$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{el})$ und $\varepsilon f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$.*

Angenommen $n_i < n_j$, dann existiert eine Konstante C , sodass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$|\langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon \quad \text{und} \quad |\langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & \langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle = \langle a(\underline{h}_t^j) a^*(\underline{h}_t^i) A^* \psi_g, \psi_g \rangle \\ &= \langle a(\underline{h}_t^j) a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, A \psi_g \rangle + \langle B^* \otimes [a(\underline{h}_t^j) a^*(\underline{h}_t^i), W(-f)] \psi_g, \psi_g \rangle. \end{aligned}$$

Wir zeigen wie im Beweis von Lemma 2.2.9, dass der zweite Summand durch ein Potenzgesetz beschränkt ist. Den ersten Summanden schätzen wir ab, indem wir mittels Induktion in n_i zeigen, dass $\|a(\underline{h}_t^j) a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g\| \leq \frac{C}{1 + |t|^n} + \varepsilon$.

Induktionsanfang $n_i = 0$: Ein Term der Form $a(h_{1,t}^j) \dots a(h_{n_j,t}^j) \psi_g$ (eine beliebige Anzahl $n_j > 0$ Vernichtungsoperatoren und $n_i = 0$ Erzeugungsoperatoren) kann nach Lemma 2.2.6 abgeschätzt werden durch $\frac{C(n,\delta)}{1 + |t|^n} + \delta$ mit beliebigem $\delta > 0$.

Induktionsschritt: Sei $n_i > 0$. Kommutieren wir $a^*(\underline{h}_t^i)$ und $a(\underline{h}_t^j)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|a(\underline{h}_t^j) a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g\| \leq \|a^*(\underline{h}_t^i) a(\underline{h}_t^j) \psi_g\| + |\langle h_l^j, h_k^i \rangle_{L^2}| \times \\ & \times \sum_{l=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_i} \|a(h_{1,t}^j) \cdots a(h_{l-1,t}^j) a^*(h_{1,t}^i) \cdots \widehat{a^*(h_{k,t}^i)} \cdots a^*(h_{n_i,t}^i) a(h_{l+1,t}^j) \cdots a(h_{n_j,t}^j) \psi_g\| \end{aligned}$$

wobei der erste Summand mittels Lemma 2.2.6 abgeschätzt werden kann (in der Form $\leq \frac{C(n,\delta)}{1 + |t|^n} + \delta$). In der Doppelsumme unterscheiden wir zwei Fälle.

Im einen Fall, für Summanden mit $l < n_j$ (d.h. direkt vor ψ_g steht mindestens ein Vernichter), können wir ebenfalls Lemma 2.2.6 verwenden. Im anderen Fall haben wir $\|a(h_{1,t}^j) \cdots a(h_{n_j-1,t}^j) a^*(h_{1,t}^i) \cdots a^*(h_{k,t}^i) \cdots a^*(h_{n_i,t}^i) \psi_g\|$; das ist von der selben Form wie der Ausdruck mit dem wir anfangen, aber mit nur noch $n_j - 1$ Vernichtungsoperatoren und $n_i - 1$ Erzeugungsoperatoren. Wir können also die Induktionsannahme zum Abschätzen $\leq \frac{C(n,\delta)}{1+|t|^n} + \delta$ verwenden.

Es bleibt δ klein genug zu wählen. \square

Lemma 2.2.11. *Seien $h_k^i \in L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1 \dots N$, $k = 1 \dots n_i$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante C , so dass*

$$\|\psi_g \langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle - \psi_g \langle \psi_g, a_+(\underline{h}_t^i) a_+^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle\| \leq \frac{C}{1+|t|^n} \quad \forall t > 0.$$

Beweis. Offenbar

$$\langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle = \langle e^{iHt} a^*(\underline{h}_t^i) e^{-iEt} \psi_g, e^{iHt} a^*(\underline{h}_t^j) e^{-iEt} \psi_g \rangle. \quad (2.14)$$

Mit (2.14) und der Abschätzung $\|a_+^*(\underline{h}^i) \psi_g - e^{iHt} a^*(\underline{h}_t^i) e^{-iHt} \psi_g\| \leq \frac{C_i}{1+|t|^n} \forall i = 1, \dots, N$ aus Lemma 2.2.8 folgt die Aussage. \square

Das folgende Theorem ist unser erstes Ergebnis zur Abschätzung der Relaxation in den Grundzustand. Damit haben wir bewiesen, dass für relaxierende Zustände die Erwartungswerte lokalisierter Observablen schneller als jede inverse Potenz von t relaxieren. Im Beweis setzen wir die vorangegangenen Abschätzungen zusammen.

Theorem 2.2.12 (Relaxation in den Grundzustand). *Es sei $H = (\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V + H_f$ und es seien V und κ so, dass die Voraussetzungen vom Anfang des Unterkapitels erfüllt sind. Sei $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ und sei $\psi_{0,t} := e^{-iHt} \psi_0$ mit*

$$\psi_0 \in \overline{\text{span}}\{a_+^*(\underline{h}) \psi_g : \underline{h} \in (L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\}))^m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$|\langle \psi_{0,t}, A \psi_{0,t} \rangle - \langle \psi_g, A \psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle| \leq \frac{C}{1+|t|^n} + \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei zuerst $A = B \otimes W(f)$ mit $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{el}})$ und $\varepsilon f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Nach Lemma 2.2.3 approximieren wir ψ_0 mit einer endlichen Linearkombination $\psi = \sum_{i=1}^N c_i a_+^*(\underline{h}^i) \psi_g$, mit $h_k^i \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$ und $\varepsilon h_k^i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $k = 1 \dots n_i$, sodass $\|\psi_0 - \psi\| < \varepsilon$.

Wir expandieren die Gleichung durch Einfügen teleskopierender Terme. Teilweise spalten wir die Fälle $n_i \geq n_j$ und $n_i < n_j$ auf, wo diese im Weiteren getrennt behandelt

werden.

$$|\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi, \psi \rangle| \quad (2.15)$$

$$\leq |\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, A a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \quad (2.16)$$

$$+ |\sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, A a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle - \sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \quad (2.17)$$

$$+ |\sum_{\substack{i,j=1 \\ n_i \geq n_j}}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle - \sum_{\substack{i,j=1 \\ n_i \geq n_j}}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, \psi_g \rangle \langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \quad (2.18)$$

$$+ |\sum_{\substack{i,j=1 \\ n_i < n_j}}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| + |\sum_{\substack{i,j=1 \\ n_i < n_j}}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, \psi_g \rangle \langle \psi_g, a(\underline{h}_t^i) a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle| \quad (2.19)$$

$$+ |\sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, \psi_g \rangle \langle a^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, a^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle - \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \bar{c}_i c_j \langle A^* \psi_g, \psi_g \rangle \langle a_+^*(\underline{h}_t^i) \psi_g, a_+^*(\underline{h}_t^j) \psi_g \rangle}_{= \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi, \psi \rangle}|, \quad (2.20)$$

Wir schätzen die Zeilen einzeln ab. Sei $\delta > 0$.

Nach Lemma 2.2.8 ist Zeile (2.16) beschränkt durch $\frac{C_1}{1+|t|^n}$.

Nach Lemma 2.2.9 ist Zeile (2.17) beschränkt durch $\frac{C_3}{1+|t|^n}$.

Für Zeile (2.18) zeigt Lemma 2.2.7, dass es eine obere Schranke $\frac{C_5}{1+|t|^n} + \delta$ gibt.

Zeile (2.20) wird beschränkt durch $\frac{C_4}{1+|t|^n}$, siehe Lemma 2.2.11.

Nach Lemma 2.2.10 sind die beiden Terme der Zeile (2.19) beschränkt durch $\frac{C_2}{1+|t|^n} + \delta$.

Also haben wir

$$|\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi, \psi \rangle| \leq 5 \left(\max_{i=1..5} C_i \right) \frac{1}{1+|t|^n} + 2\delta.$$

Da A ein beschränkter Operator ist, erhalten wir indem wir ϵ (siehe Beweisangfang) und δ klein genug wählen

$$|\langle \psi_{0,t}, A\psi_{0,t} \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle| \leq \frac{C}{1+|t|^n} + \epsilon. \quad (2.21)$$

Wir beenden den Beweis mit einem Approximationsargument für beliebige Operatoren $A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Für jedes $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ existiert eine endliche Linearkombination $A' = \sum_{i=1}^k c_i B_i \otimes$

$W(f_i)$ mit $c_i \in \mathbb{C}$, $B_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\text{el}})$ und $\varepsilon f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1 \dots k$, sodass die Operatornorm $\|A - A'\|$ beliebig klein ist. Dann

$$\begin{aligned} & |\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle| \leq |\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \langle \psi_t, A'\psi_t \rangle| \\ & + |\langle \psi_t, A'\psi_t \rangle - \langle \psi_g, A'\psi_g \rangle \langle \psi_0, \psi_0 \rangle| + |\langle \psi_g, A'\psi_g \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle| |\langle \psi_0, \psi_0 \rangle|. \end{aligned}$$

Dies wird mittels (2.21) abgeschätzt. □

Wir sehen gegenüber des Ergebnisses dieses Kapitels zwei Verbesserungsmöglichkeiten.

Einerseits würden wir gerne kontrollieren, wie die Konstante C von ψ_0 abhängt, im Idealfall um eine uniforme Abschätzung zu beweisen. Allgemein wird dies wie im Anschluss an Lemma 2.2.8 diskutiert nicht möglich sein. Einen Ansatz die Menge der bei der Relaxation entstehenden Photonzustände so einzuschränken, dass eine uniforme Abschätzung möglich wird, diskutieren wir in Kapitel 3.

Andererseits hätten wir für die Relaxation gerne ein Exponentialgesetz als Abschätzung, da dieses im Gegensatz zu einem Potenzgesetz eine typische Zeitskala liefert, eine „Lebensdauer“. Hierfür setzen wir bei der Konvergenz gegen die asymptotischen Erzeuger (2.13) an und können für diese in einem vereinfachten Modell auch ein Exponentialgesetz beweisen (siehe Korollar 4.2.4).

3. Uniforme Ausbreitungsabschätzung für Photonen

Wir diskutieren in diesem Kapitel den ersten der am Ende des vorigen Kapitels vorgeschlagenen Verbesserungsansätze für die Abschätzung der Relaxation in den Grundzustand.

Wie im Anschluss an Lemma 2.2.8 diskutiert, ist in der Abschätzung aus Kapitel 2.2 die Konstante C von den Photonzuständen h_i und damit von ψ_0 und ε abhängig. In Unterkapitel 3.1 geben wir eine uniforme Abschätzung für die räumliche Ausbreitung von (in zu definierendem Sinne) auslaufenden Photonzuständen. Wir hoffen dieses Resultat auf von einem Atom emittierte Photonen anwenden zu können und untersuchen daher in Unterkapitel 3.2 an Hand des Übergangsmatrixelements, ob die bei der Relaxation emittierten Photonzustände tatsächlich auslaufend sind. Wir werden jedoch finden, dass sie im Wesentlichen einlaufend sind!

3.1. Übertragung der Perry-Abschätzung

Unser Ergebnis dieses Unterkapitels ist die uniforme Abschätzung der Photonausbreitung, Theorem 3.1.3. Dabei handelt es sich um die Übertragung der sogenannten Perry-Abschätzung [Tes09, Lemma 12.5] [Wei03, Satz 24.7] aus dem Enß-Zugang zur nicht-relativistischen quantenmechanischen Streutheorie auf freie Photonen (hier in Einteilchentheorie behandelt). Die folgenden Definitionen und die Sätze 3.1.1 und 3.1.2 sind in [Wei03, Kapitel 24] zu finden.

Der Operator A_0 in $L^2(\mathbb{R}^m)$ ist definiert durch

$$D(A_0) := C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \quad A_0 := \frac{1}{2} \left(\mathbf{x} \cdot \frac{1}{i} \nabla + \frac{1}{i} \nabla \cdot \mathbf{x} \right). \quad (3.1)$$

Satz 3.1.1 ([Wei03, Kapitel 24]). *A_0 ist wesentlich selbstadjungiert, der Abschluss sei $A := \overline{A_0}$. Sei \mathcal{F} die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^m)$, dann gilt:*

$$\mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1} = -A.$$

A ist der Erzeuger von Dilatationen, d. h. $(e^{iAt} f)(\mathbf{x}) = e^{tm/2} f(e^t \mathbf{x})$.

Die Mellin-Transformation ist definiert als (wobei der Limes im Sinne der L^2 -Norm-Konvergenz zu lesen ist):

$$\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times S^{m-1})$$

$$(\mathcal{M}f)(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N r^{-i\lambda-1+m/2} f(r\boldsymbol{\omega}) dr, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\omega} \in S^{m-1}. \quad (3.2)$$

Die Mellin-Transformation ist unitär. Mit $V : L^2(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times S^{m-1})$, $(Vf)(s, \boldsymbol{\omega}) = e^{ms/2} f(e^s \boldsymbol{\omega})$, und \mathcal{F}_1 der Fouriertransformation in der Koordinate s lässt sich die Mellin-Transformation als $\mathcal{M} = \mathcal{F}_1 V$ schreiben.

Die Inverse der Mellin-Transformation ist gegeben durch (mit Limes im L^2 -Sinn)

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(r\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N r^{i\lambda} r^{-m/2} g(\lambda, \boldsymbol{\omega}) d\lambda \quad (3.3)$$

Satz 3.1.2 ([Wei03, Kapitel 24]). *Sei M_λ der Multiplikationsoperator mit $t(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = \lambda$ in $L^2(\mathbb{R} \times S^{m-1})$. Die Mellin-Transformation ist eine Spektraldarstellung von A :*

$$\mathcal{M}A\mathcal{M}^{-1} = M_\lambda. \quad (3.4)$$

Zur Interpretation seien folgende Anmerkungen gemacht: Für f in Ortsdarstellung ist $\langle f, Af \rangle$ der Realteil des Erwartungswerts von $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$, dem Skalarprodukt von Ort und Impuls. Für Zustände aus dem spektralen Teilraum $\chi(A \geq 0)\mathcal{H}$ zeigt also, klassisch gesprochen, der Impuls in die gleiche Richtung wie der Ortsvektor des Photons, weshalb wir diese Zustände als *auslaufend* bezeichnen. Diese Interpretation wird durch unser folgendes Theorem gestützt.

Wir beweisen hier nur den Fall skalarer Photonen, das Resultat überträgt sich aber trivialerweise auf Photonzustände aus $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. Wir verstehen hier die Photonzustände in Ortsdarstellung, daher $\omega = \sqrt{-\Delta}$. Das Resultat gilt in beliebiger Raumdimension m .

Theorem 3.1.3. *Sei $\omega = \sqrt{-\Delta}$ auf $L^2(\mathbb{R}^m)$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ und $g \in C_0^\infty((0, \infty))$ mit $\text{supp } g \subset [c, d]$, $0 < c < d$.*

Dann existiert eine Konstante $C = C(n, \varepsilon)$, sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{für } |t| \geq \max\left\{1, \frac{|a|}{c(1-\varepsilon)}\right\} \text{ ist } \|\chi_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}} e^{-i\omega t} g(\omega) \chi(A)\| \leq \frac{C}{(1+|t|)^n}.$$

Dabei ist für $t < 0$ zu nehmen $\chi(A) = \chi(A \leq -a)$, für $t > 0$ ist zu nehmen $\chi(A) = \chi(A \geq a)$.

Bemerkung: Die Konstante C ist unabhängig von a , aber es muss gelten $|t| \geq |a|/c(1-\varepsilon)$. Dies ist aber schon notwendig, damit $(1-\varepsilon)|t| - |a|/c$ ein nicht-negativer Radius ist und insofern keine Einschränkung.

Beweis. Wir zeigen nur den Fall $t > 0$, der Fall $t < 0$ läuft analog. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Schritt 1. Da g eine C_0^∞ -Funktion ist können wir in der folgenden Rechnung die Fouriertransformation als konvergentes Integral und den Ausdruck dann als L^2 -Skalarprodukt

schreiben:

$$\begin{aligned}
[e^{-i\omega t} g(\omega) \chi(A \geq a) f](\mathbf{x}) &= [\mathcal{F}^{-1} e^{-i|\mathbf{k}|t} g(|\mathbf{k}|) \mathcal{F} \chi(A \geq a) f](\mathbf{x}) \\
&= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} e^{-i|\mathbf{k}|t} g(|\mathbf{k}|) [\mathcal{F} \chi(A \geq a) f](\mathbf{k}) \\
&= \langle k_{\mathbf{x},t}, \mathcal{F} \chi(A \geq a) f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} \stackrel{\text{Satz 3.1.1}}{=} \langle k_{\mathbf{x},t}, \chi(A \leq -a) \mathcal{F} f \rangle = \langle h_{\mathbf{x},t}, \mathcal{F} f \rangle
\end{aligned}$$

wobei wir definiert haben

$$k_{\mathbf{x},t}(\mathbf{k}) := (2\pi)^{-m/2} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} e^{-i|\mathbf{k}|t} g(|\mathbf{k}|), \quad h_{\mathbf{x},t} := \chi(A \leq -a) k_{\mathbf{x},t}.$$

Schritt 2. Wir schätzen nun $\|h_{\mathbf{x},t}\|$ ab; dies funktioniert wie der Beweis der Methode der stationären Phase. Wir verwenden zuerst, dass die Mellin-Transformation eine Spektraldarstellung von A ist:

$$\|h_{\mathbf{x},t}\| = \|\chi(A \leq -a) k_{\mathbf{x},t}\| = \|\mathcal{M} \chi(A \leq -a) k_{\mathbf{x},t}\| = \|\chi_{\{\lambda \leq -a\}} \mathcal{M} k_{\mathbf{x},t}\| \quad (3.5)$$

Es genügt also $\mathcal{M} k_{\mathbf{x},t}$ für $\lambda \leq -a$ abzuschätzen. Es ist

$$(\mathcal{M} k_{\mathbf{x},t})(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-(m+1)/2} \int_0^\infty e^{-i(r\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} - t|r\boldsymbol{\omega}| + \lambda \log(r))} r^{m/2-1} \overline{g(|r\boldsymbol{\omega}|)} dr. \quad (3.6)$$

Für die Phase führen wir die Bezeichnung $\phi(r) := (r\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega} - t|r\boldsymbol{\omega}| + \lambda \log(r))$, $\phi'(r) := \partial_r \phi(r)$ ein. Mittels $(l+1)$ -facher partieller Integration erhalten wir:

$$(\mathcal{M} k_{\mathbf{x},t})(\lambda, \boldsymbol{\omega}) = C \int_0^\infty e^{-i\phi(r)} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\phi'(r)} \cdots \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\phi'(r)} \left[r^{m/2-1} \overline{g(r)} \right] \right] \right] dr. \quad (3.7)$$

Hier treten $(l+1)$ -viele Ableitungen auf.

Einschub: Abschätzung der Phase. Wir zeigen unter Verwendung von $|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c$ zuerst:

$$|\phi'(r)| = |t - \lambda/r - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}| \geq |t - \lambda/r| - (1-\varepsilon)|t| + |a|/c. \quad (3.8)$$

Falls $\lambda > 0$, dann ist $t \geq |a|/c \geq \lambda/c \geq \lambda/r$, also $|t - \lambda/r| = t - \lambda/r$; für $\lambda < 0$ ist $|t - \lambda/r| = t - \lambda/r$ trivial. Damit folgt aus (3.8)

$$|\phi'(r)| \geq \varepsilon|t| + \underbrace{\frac{|a|}{c} - \frac{\lambda}{r}}_{\geq 0} \geq \varepsilon|t|. \quad (3.9)$$

Wir erweitern: $|\phi'(r)| = (1 + |\lambda| + |t|) \frac{|\phi'(r)|}{(1+|\lambda|+|t|)}$, und mittels (3.9) sowie $t \geq 1$ können wir den Bruch abschätzen, sodass wir erhalten:

$$|\phi'(r)| \geq (1 + |\lambda| + |t|) \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.10)$$

Außerdem benötigen wir noch eine obere Schranke für die Ableitungen der Phase. Leicht finden wir hierfür (mit $m \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben):

$$|\phi^{(k)}(r)| \leq \delta_0(1 + |\lambda| + |t|) \quad \forall k = 1, \dots, m, \quad \delta_0 = \max\left\{2, \frac{1}{c^2}, \frac{2}{c^3}, \dots, \frac{(m-1)!}{c^m}\right\} \quad (3.11)$$

Abschätzung von (3.7). Unter Verwendung der Ungleichungen (3.10) und (3.11) können wir nun den Integranden in Gl. (3.7) folgendermaßen abschätzen (durch Induktion in der Zahl der Ableitungen):

$$\left| \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\phi'(r)} \cdots \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\phi'(r)} \left[r^{m/2-1} \overline{g(r)} \right] \right] \right] \right| \leq \frac{C}{(1 + |\lambda| + |t|)^{(l+1)}} \zeta(r),$$

wobei die Konstante C von l , ε und δ_0 abhängt und ζ eine beschränkte Funktion mit Träger in $[c, d]$ ist, welche alle Ableitungen bis zur $(l+1)$ -ten von $r^{m/2-1} \overline{g(r)}$ majorisiert. Wir erhalten somit

$$|(\mathcal{M}k_{\mathbf{x},t})(\lambda, \omega)| \leq \frac{C}{(1 + |\lambda| + |t|)^{(l+1)}} \quad \forall \lambda \leq -a, \omega \in S^{m-1},$$

und damit

$$\begin{aligned} \|h_{\mathbf{x},t}\|^2 &= \|\chi_{\{\lambda \leq -a\}} \mathcal{M}k_{\mathbf{x},t}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \int_{S^{m-1}} d\omega \chi_{\{\lambda \leq -a\}}(\lambda) |(\mathcal{M}k_{\mathbf{x},t})(\lambda, \omega)|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{-a} d\lambda \int_{S^{m-1}} d\omega \frac{C}{(1 + |\lambda| + |t|)^{2(l+1)}}. \end{aligned}$$

Das Integral über S^{m-1} liefert eine Konstante die nur von m abhängt. Mittels Substitution berechnen wir leicht das Integral bezüglich λ . Terme der Form $-(1 + |t| + |a|)^{-2l-1}$ können dann (man beachte die Vorzeichen) weggelassen werden, wodurch die Abschätzung nur gröber wird. Somit erhalten wir die a -unabhängige Abschätzung

$$\|h_{\mathbf{x},t}\|^2 \leq C(1 + |t|)^{-2l-1}. \quad (3.12)$$

Schritt 3. Mittels der Ungleichung (3.12) schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} &\|\chi_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c\}} e^{-i\omega t} g(\omega) \chi(A \geq a) f\|^2 \\ &= \int_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c\}} | [e^{-i\omega t} g(\omega) \chi(A \geq a) f](\mathbf{x}) |^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c\}} |\langle h_{\mathbf{x},t}, \mathcal{F}f \rangle|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c\}} \|h_{\mathbf{x},t}\|^2 \|\mathcal{F}f\|^2 d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(3.12)}{\leq} C(1 + |t|)^{-2l-1} \underbrace{\int_{\{|\mathbf{x}| \leq (1-\varepsilon)|t| - |a|/c\}} d\mathbf{x}}_{\leq C_m |t|^m \text{ (Kugelvolumen)}} \|\mathcal{F}f\|^2 \\ &\leq C(1 + |t|)^{-2n} \|f\|^2, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt l mit $2l + 1 - m \geq 2n$ gewählt und $|t|/(1 + |t|) \leq 1$ benutzt wurde. Da die Zustände f in L^2 dicht liegen, folgt die Aussage für die Operatornorm. \square

Wir können ein Korollar aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik [Tes09], welches besagt, dass jeder Zustand für $t \rightarrow \infty$ auslaufend wird, fast unverändert übertragen. Analoges gilt für $t \rightarrow -\infty$ mit einlaufend.

Korollar 3.1.4. *Sei $\omega = \sqrt{-\Delta}$ und g wie in Theorem 3.1.3. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, dann gilt*

$$\|\chi(A \leq a)e^{-i\omega t}g(\omega)\psi\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Beweis. Wir haben unter Verwendung von $\|B\| = \|B^*\|$ (für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$)

$$\begin{aligned} & \|\chi(A \leq a)e^{-i\omega t}g(\omega)\psi\| \\ & \leq \|\chi(A \leq a)e^{-i\omega t}g(\omega)\chi_{\{|x| \leq (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}}\psi\| + \|\chi(A \leq a)e^{-i\omega t}g(\omega)\chi_{\{|x| > (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}}\psi\| \\ & \leq \|\chi_{\{|x| \leq (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}}e^{i\omega t}g(\omega)\chi(A \leq a)\psi\| + \|\chi(A \leq a)\| \|g(\omega)\| \|\chi_{\{|x| > (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}}\psi\|. \end{aligned}$$

Da in der starken Topologie $\chi_{\{|x| > (1-\varepsilon)|t| - \frac{|a|}{c}\}} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ folgt die Aussage aus Theorem 3.1.3. \square

Diese Abschätzung ist offenbar verbesserbar, wenn eine räumliche Abfalleigenschaft für ψ gegeben ist.

Ausgefeiltere Resultate in der Art von Korollar 3.1.4 sind als „minimal velocity estimates“ bekannt [HSS99] [Ric04]; diese Resultate setzen für selbstadjungierte Operatoren H und A eine Mourre-Ungleichung $i[H, A] \geq \theta > 0$ auf einem spektralen Unterraum $\mathcal{H}_\Delta = \chi_\Delta(H)\mathcal{H}$ voraus und liefern, dass $\psi \in \mathcal{H}_\Delta$ von e^{-iHt} (bis auf einen für $t \rightarrow \infty$ verschwindenden Fehler) mit Mindestgeschwindigkeit θ durchs Spektrum von A geschoben wird.

3.2. Emissionsamplituden in Störungstheorie und ein-/auslaufende Photonen

In diesem Unterkapitel untersuchen wir, wie das Matrixelement für die Emission eines Photons davon abhängt, ob der Photonzustand einlaufend oder auslaufend ist.

Auf $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ definieren wir den Dilatationserzeuger A durch $(Ah)(\cdot, \lambda) := A(h(\cdot, \lambda))$ für $\lambda = 1, 2$. Wir sprechen von *auslaufenden* Photonen, wenn diese *in Ortsdarstellung* im spektralen Unterraum $\text{Ran } \chi(A \geq 0)$ liegen. In Impulsdarstellung sind nach Satz 3.1.1 die Zustände aus $\text{Ran } \chi(A \leq 0)$ die auslaufenden.

Motivation für die Untersuchung in diesem Kapitel ist die Hoffnung, die entstehenden Photonen seien im Wesentlichen auslaufend, womit unsere Form der Perry-Abschätzung verspräche nützlich zu werden. Wir werden jedoch im Gegenteil finden, dass zum Matrixelement im Wesentlichen nur einlaufende Zustände beitragen. Damit scheint zwar die Perry-Abschätzung nicht anwendbar zu sein, das Ergebnis ist aber bereits für sich genommen interessant.

Wir verwenden den Hamilton-Operator (1.1), $H_\alpha = (\mathbf{p} + \alpha^{3/2}\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}))^2 + V + H_f$, um eine Störungsentwicklung nach der Feinstrukturkonstante α durchzuführen.

Für dieses Unterkapitel setzen wir voraus:

Voraussetzungen. *Es sei V infinitesimal beschränkt bezüglich $-\Delta$. Darüber hinaus sei V so beschaffen, dass ein (bis auf eine Phase) eindeutiger Grundzustand ψ_α zu H_α existiert und $\psi_\alpha \in D(|\mathbf{x}|^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Für kleine α können wir auf [Hir00] verzichten und die Eindeutigkeit des Grundzustandes stattdessen aus $\|\psi_\alpha - \psi_0\| \leq \alpha^{3/2}C$ [GZ09b, Proposition A.3] folgern, falls $H_{\text{el}} = -\Delta + V$ einen eindeutigen Grundzustand besitzt.

3.2.1. Entwicklung des Matrixelements nach der Feinstrukturkonstante

Für $\alpha = 0$ ist der Hamilton-Operator $H_0 = -\Delta + V + H_f = H_{\text{el}} + H_f$ mit Grundzustand $\psi_0 = \psi_{\text{el}} \otimes \Omega$, wobei ψ_{el} der energetisch tiefste Eigenzustand von H_{el} ist. Sei ferner ψ_i ein energetisch höherer Eigenzustand von H_{el} , d. h.

$$H_{\text{el}}\psi_i = E_i\psi_i, \quad H_0(\psi_i \otimes \Omega) = E_i(\psi_i \otimes \Omega) \quad \text{und} \quad E := E_i - E_0 > 0.$$

Für den Prozess der Emission eines einzelnen Photons unter Übergang des Atoms in den Grundzustand betrachten wir das Skalarprodukt (im weiteren als *Übergangsmatrixelement* oder *Emissionsamplitude* bezeichnet)

$$\langle a_+^*(h)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle.$$

Dieses gibt uns den Überlapp des angeregten Zustandes ohne Photonen mit dem Grundzustand und einem für $t \rightarrow \infty$ freien Photon.

Wir berechnen das Matrixelement in führender Ordnung der Feinstrukturkonstante. Für die Berechnung von Emissionsamplituden bis zu beliebiger Ordnung verweisen wir darauf, dass dies analog zur Streuamplitudenentwicklung aus Kapitel 5 möglich ist.

Bemerkung: Da α im Argument des Vektorpotentials auftaucht, liefert die Entwicklung nach α automatisch auch die Dipolapproximation.

Lemma 3.2.1. *Es sei der UV-Cutoff $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon f \in C_0^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$. Sei $\mathbf{p}(s) := e^{iH_{\text{el}}s}\mathbf{p}e^{-iH_{\text{el}}s}$ und $\mathbf{A}(\mathbf{0}, s) := e^{iH_f s}\mathbf{A}(\mathbf{0})e^{-iH_f s}$. Dann gilt:*

$$a_+^*(f)\psi_\alpha - a^*(f)\psi_\alpha = 2i\alpha^{3/2} \int_0^\infty \mathbf{p}(s)\psi_{\text{el}} \otimes [\mathbf{A}(\mathbf{0}, s), a^*(f)]\Omega \, ds + \mathcal{R}(\alpha),$$

mit einem Vektor $\mathcal{R}(\alpha)$ welcher erfüllt $\|\mathcal{R}(\alpha)\| = \mathcal{O}(\alpha^{5/2})$ für $\alpha \rightarrow 0$.

Beweis. Folgt wie Theorem 4.1 in [GZ09b], unter Vereinfachung des Beweises. \square

Satz 3.2.2 (Entwicklung des Matrixelements). *Sei $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Sei $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon h \in C_0^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ und $E = E_i - E_0 > 0$. Dann ist für $\alpha \rightarrow 0$*

$$\langle a_+^*(h)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle = -2i\alpha^{3/2} \langle \psi_{\text{el}}, \mathbf{p}\psi_i \rangle \cdot \int_0^\infty e^{-iEt} \overline{\langle \mathbf{G}_0, h_t \rangle} \, dt + \mathcal{O}(\alpha^{5/2}). \quad (3.13)$$

Beweis. Es gilt offenbar $\langle a_+^*(f)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle = \langle a_+^*(f)\psi_\alpha - a^*(f)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle$, da $a^*(f)\psi_\alpha$ mindestens ein Photon enthält, also zu $\psi_i \otimes \Omega$ orthogonal ist. Die Aussage folgt jetzt aus Lemma 3.2.1. \square

Den Photonanteil dieses Matrixelements werden wir im nächsten Unterkapitel mit Hilfe der Mellin-Transformation darstellen.

3.2.2. Matrixelement ausgedrückt durch die Mellin-Transformation

Wir bringen nun das Matrixelement für die Emission eines Photons in Zusammenhang mit der Klassifizierung der Photonenzustände in einlaufend und auslaufend.

Wir rechnen hier im Gegensatz zu Lemma 3.2.1 und Satz 3.2.2 mit einem scharfen UV-Cutoff. Es bezeichne \mathcal{M} wieder die Mellin-Transformation. Man beachte, dass hier der Photonzustand in Impulsdarstellung zu verstehen ist, $h_t(\mathbf{k}) = e^{-i|\mathbf{k}|t}h(\mathbf{k})$.

Theorem 3.2.3. *Sei $E = E_i - E_0 > 0$. Sei $\kappa(\mathbf{k}) = \chi_{[0,\Lambda]}(|\mathbf{k}|)$ mit $\Lambda > E$.*

Sei $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon h \in C_0^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ gegeben. Wir definieren komponentenweise $f_l := \mathcal{M}((\varepsilon h)_l)$ und $F_l(\lambda) := \int_{S^2} f_l(\lambda, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}$. Zu jedem $l = 1, 2, 3$ existiere ein $a > 0$, so dass $\int_{-a}^a \frac{|F_l(\lambda)|}{|1 - e^{2\pi\lambda}|} d\lambda < \infty$.

Dann ist (in Vektornotation $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$)

$$\int_0^\infty e^{-iEt} \overline{\langle \mathbf{G}_0, h_t \rangle} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} E^{3/2} \overline{\mathcal{M}^{-1}[\mathbf{F}_{\coth}](E)} - \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^\infty \overline{\mathbf{F}(\lambda)} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \frac{\Lambda^{-i\lambda}}{k + i\lambda} d\lambda, \quad (3.14)$$

wobei \mathbf{F}_{\coth} definiert ist durch $\mathbf{F}_{\coth}(\lambda) := (1 + \coth \pi\lambda)\mathbf{F}(\lambda)$, vgl. Abb. 3.1.

Beweis. Da $\varepsilon h \in C_0^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ und $\mathcal{M} = \mathcal{F}_1 V$ folgt aus den bekannten Eigenschaften der Fouriertransformation, dass $f_l \in L^1(\mathbb{R} \times S^2; \mathbb{C})$. Daher können wir die Mellin-Rücktransformation explizit schreiben als

$$(\varepsilon h)_l(k\boldsymbol{\omega}) = (\mathcal{M}^{-1} f_l)(k\boldsymbol{\omega}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty k^{i\lambda-3/2} f_l(\lambda, \boldsymbol{\omega}) d\lambda. \quad (3.15)$$

Wir setzen Gl. (3.15) in $\langle G_{0,l}, h_t \rangle$ ein (für $l = 1, 2, 3$) und erhalten

$$\begin{aligned} \langle G_{0,l}, h_t \rangle &= \int d^3\mathbf{k} \frac{\kappa(\mathbf{k})}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \underbrace{\sum_{j=1}^2 \varepsilon(\mathbf{k}, j)_l h(\mathbf{k}, j)}_{= (\varepsilon h)_l(\mathbf{k})} e^{-ikt} \\ &= \int_0^\infty dk k^2 \int_{S^2} d\boldsymbol{\omega} \frac{\kappa(k)}{\sqrt{2k}} e^{-ikt} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty k^{i\lambda-3/2} f_l(\lambda, \boldsymbol{\omega}) d\lambda \\ &= \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dk \kappa(k) e^{-ikt} \int_{-\infty}^\infty d\lambda k^{i\lambda} \underbrace{\int_{S^2} d\boldsymbol{\omega} f_l(\lambda, \boldsymbol{\omega})}_{= F_l(\lambda)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$(3.17)$$

Wir führen eine Regularisierung ein, welche uns erlauben wird nach Tonelli und Fubini Integrale zu vertauschen. Sei $\Theta_\varepsilon(t) := \Theta(t)e^{-\varepsilon t}$ mit Θ der Heavisidefunktion. Da $|\langle G_{0,l}, h_t \rangle| \leq C(1+t)^{-2}$ (nach der Methode der stationären Phase) gilt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\int_0^\infty dt e^{-iEt} \overline{\langle G_{0,l}, h_t \rangle} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty dt \Theta_\varepsilon(t) e^{-iEt} \overline{\langle G_{0,l}, h_t \rangle}.$$

Setzen wir hier (3.17) ein, so erhalten wir durch Integralvertauschung

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt e^{-iEt} \overline{\langle G_{0,l}, h_t \rangle} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty dt \Theta_\varepsilon(t) e^{-iEt} \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dk \kappa(k) e^{ikt} \int_{-\infty}^\infty d\lambda k^{-i\lambda} \overline{F_l(\lambda)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \overline{F_l(\lambda)} \int_{-\infty}^\infty dk \kappa(k) k^{-i\lambda} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty dt \Theta_\varepsilon(t) e^{-iEt} e^{ikt}}_{= -(ik - iE - \varepsilon)^{-1}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \overline{F_l(\lambda)} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\Lambda \frac{k^{-i\lambda}}{k - (E - i\varepsilon)} dk. \end{aligned}$$

Wir verwenden für das Integral über k Lemma 3.2.6 und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt e^{-iEt} \overline{\langle G_{0,l}, h_t \rangle} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \overline{F_l(\lambda)} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\frac{2\pi i e^{-i\lambda \log(E - i\varepsilon)}}{1 - e^{2\pi\lambda}}}_{(a)} - \underbrace{\Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E - i\varepsilon}{\Lambda} \right)^k \frac{1}{k + i\lambda}}_{(b)} \right). \end{aligned}$$

Nun suchen wir eine ε -unabhängige integrierbare Majorante, sodass wir den Limes $\varepsilon \rightarrow 0^+$ unters Integral ziehen können. Für (b) haben wir die Abschätzung

$$\left| \Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E - i\varepsilon}{\Lambda} \right)^k \frac{1}{k + i\lambda} \right| \leq \frac{1}{|\lambda|} + \sum_{k=1}^\infty \left| \frac{E - i\varepsilon}{\Lambda} \right|^k \leq \frac{1}{|\lambda|} + C(E, \Lambda).$$

Die Konstante $C(E, \Lambda)$ haben wir dabei (als obere Schranke uniform in ε , für ε hinreichend klein) durch Aufsummation der geometrischen Reihe erhalten. Wegen $|C/(1 - e^{2\pi\lambda})| \geq 1/|\lambda|$ ist nach Voraussetzung $|F_l(\lambda)/\lambda|$ integrierbar.

Eine Majorante für (a) finden wir folgendermaßen: Es ist $\log(E - i\varepsilon) = \log_{\mathbb{R}}|E - i\varepsilon| + i \arg(E - i\varepsilon)$. Im Betrag $|e^{-i\lambda \log(E - i\varepsilon)}| = |e^{\lambda \arg(E - i\varepsilon)}|$ sind für das Argument $\arg(E - i\varepsilon)$ für hinreichend kleine ε nur Werte in $[3\pi/2, 2\pi]$ möglich (beachte die Lage von $E - i\varepsilon$ unterhalb der Achse und die Wahl des Logarithmuszweiges in Lemma 3.2.6). Da $e^{\lambda 3\pi/2}/|1 - e^{2\pi\lambda}| \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow -\infty$) bzw. $e^{\lambda 2\pi}/|1 - e^{2\pi\lambda}| \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow +\infty$) haben wir auf $\lambda < -a$ und auf $\lambda > a$ eine integrierbare Majorante. Für $\lambda \in [-a, a]$ haben wir die in

ε uniforme Schranke $|\frac{e^{-i\lambda \log(E-i\varepsilon)}}{1-e^{2\pi\lambda}}| \leq \frac{e^{2\pi a}}{|1-e^{2\pi\lambda}|}$. Nach Voraussetzung an die F_l haben wir somit eine integrierbare Majorante gefunden.

Ziehen wir also den Limes unters Integral, so haben wir

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-iEt} \overline{\langle G_{0,l}, h_t \rangle} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \overline{F_l(\lambda)} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\pi i E^{-i\lambda} e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}} - \Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \frac{1}{k+i\lambda} \right) \\ &= \frac{-2\pi}{\sqrt{2}} E^{3/2} \overline{\mathcal{M}^{-1}[F_l(\lambda) \frac{e^{2\pi\lambda}}{1-e^{2\pi\lambda}}](E)} - \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \overline{F_l(\lambda)} \left(\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \frac{\Lambda^{-i\lambda}}{k+i\lambda} \right). \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir $E^{3/2}E^{-3/2}$ eingefügt, um das Ergebnis mittels der Mellin-Transformation ausdrücken zu können. Mit $e^{2\pi\lambda}/(1-e^{2\pi\lambda}) = (-1/2)(1+\coth(\pi\lambda))$ folgt das Theorem. \square

Wir zeigen nun, dass der vom UV-Cutoff Λ abhängende Term in (3.14) für $\Lambda \rightarrow \infty$ verschwindet. Wir sehen diesen Satz zusammen mit der Beliebigkeit von Λ als Rechtfertigung in der physikalischen Interpretation des Matrixelements diesen Term zu ignorieren.

Satz 3.2.4. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.3 gilt:*

$$\int_{-\infty}^\infty \overline{F(\lambda)} \Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \frac{1}{k+i\lambda} d\lambda \rightarrow 0 \quad (\Lambda \rightarrow \infty).$$

Beweis. Wir können $\sum_{k=1}^\infty$ und $\int d\lambda$ vertauschen, da $\sum_{k=1}^\infty (E/\Lambda)^k$ absolut konvergent ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left| \int \overline{F_l(\lambda)} \Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \frac{1}{k+i\lambda} d\lambda \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^k \left| \int \overline{F_l(\lambda)} \frac{1}{k+i\lambda} e^{-i\lambda \log \Lambda} d\lambda \right| + \left| \int \overline{F_l(\lambda)} \frac{1}{0+i\lambda} e^{-i\lambda \log \Lambda} d\lambda \right|. \end{aligned}$$

Im ersten Teil schätzen wir ab $|\int \overline{F_l(\lambda)} \frac{1}{k+i\lambda} e^{-i\lambda \log \Lambda} d\lambda| \leq \int |\frac{\overline{F_l(\lambda)}}{\lambda}| d\lambda < \infty$, da unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.3 die Funktion $\overline{F_l(\lambda)}/\lambda$ integrierbar ist. Wegen $\sum_{k \geq 1} (E/\Lambda)^k \rightarrow 0$ für $\Lambda \rightarrow \infty$ ist der erste Teil damit abgehandelt.

Im zweiten Teil erkennen wir die Fouriertransformierte einer L^1 -Funktion und somit nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma $|\int \overline{F_l(\lambda)} \frac{1}{0+i\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). \square

Rein formal erhalten wir aus Theorem 3.2.3 und Korollar 3.2.2 mit $\chi(A) := (1 + \coth \pi A)$ durch den Funktionalkalkül definiert

$$\langle a_+^*(h)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle = -i\sqrt{2}\pi\alpha^{3/2} E^{3/2} \langle \psi_{\text{el}}, \mathbf{p}\psi_i \rangle \cdot \int_{S^2} \overline{(\chi(A)\varepsilon h)}(E\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} + \mathcal{O}(\alpha^{5/2}).$$

Wie in Abbildung 3.1 dargestellt ähnelt $\chi : \lambda \mapsto (1 + \coth \pi \lambda)$ einer Stufenfunktion, die für $\lambda < 0$ verschwindet. Also ist zu erwarten, dass vor allem Anteile des Photonenzustandes aus $\text{Ran } \chi(A \geq 0)$ zum Matrixelement beitragen. Da wir in Impulsdarstellung gearbeitet haben, heißt dies: Im Wesentlichen tragen nur *einlaufende* Photonenzustände zum Matrixelement bei; von auslaufenden Zuständen erwarten wir ein kleines Matrixelement!

Es wäre interessant, diese Feststellung nicht-störungstheoretisch zu formulieren und Anwendungen davon zu suchen.

Wir können das Ergebnis physikalisch so interpretieren: Das Matrixelement lässt sich für große t schreiben als

$$\langle a_+^*(h)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle \approx \langle a^*(h_t)e^{-iE_\alpha t}\psi_\alpha, e^{-iHt}\psi_i \otimes \Omega \rangle,$$

beschreibt also die Approximation des zerfallenden Zustands $e^{-iHt}\psi_i \otimes \Omega$ durch den Grundzustand mit freiem Photon h . Für Zeiten $t < 0$ jedoch beschreibt $a^*(h_t)e^{-iE_\alpha t}\psi_\alpha$ keine Approximation an $e^{-iHt}\psi_i \otimes \Omega$; vielmehr ist zu erwarten, dass h_t für $t < 0$ der Zustand eines frei auf das Atom zufliegenden Photons ist, so dass das Photon für $t \rightarrow +\infty$ dann vom Atom ausgehend weg zufliegen scheint.

Insbesondere ist heuristisch nicht zu erwarten, dass das Matrixelement als Kriterium für eine uniforme Konvergenzabschätzung gegen die asymptotischen Erzeuger geeignet ist, denn: Sei ein beliebiger einlaufender Photonenzustand h in Impulsdarstellung vorgegeben, d. h. der Träger von $\mathcal{M}h$ liege im Bereich positiver λ . Nach Korollar 3.1.4 ist zu erwarten, dass h_t für Zeiten $t < 0$ „einlaufender“ ist, d. h. gegenüber $\mathcal{M}h$ der Träger von $\mathcal{M}h_t$ in Richtung $\lambda \rightarrow +\infty$ gewandert ist. Auf Grund der waagrechten Asymptote scheint das Matrixelement jedoch nicht zu unterscheiden zwischen Zuständen die mehr oder weniger zu positiven λ verschoben sind. Für die zu $t < 0$ versetzten Zustände ist aber langsamere Konvergenz gegen die asymptotischen Erzeuger (für $t \rightarrow +\infty$) zu erwarten.

Das folgende Lemma zeigt die Existenz nicht-verschwindender Zustände, welche die Voraussetzungen von Theorem 3.2.3 erfüllen.

Lemma 3.2.5. *Seien Polarisationsvektoren gewählt mit $\varepsilon(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|) = \varepsilon(\mathbf{k})$ für alle $\mathbf{k} \neq 0$. Falls $g \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ mit $\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$, so erfüllt $h := Ag$ die Voraussetzungen von Theorem 3.2.3, d. h. es ist $\varepsilon h \in C_0^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{C}^3)$ und $\int_{-1}^1 \frac{|F_i(\lambda)|}{|1 - e^{2\pi\lambda}|} d\lambda < \infty$.*

Beweis. Auf $\mathbf{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ ist der Dilatationserzeuger komponentenweise definiert: $(Af)_j = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \cdot \frac{1}{i}\nabla + \frac{1}{i}\nabla \cdot \mathbf{x})f_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Nach Voraussetzung ist $\varepsilon(\mathbf{k})$ invariant unter Dilatationen, daher gilt

$$e^{iAt}(\varepsilon g) = \varepsilon(e^{iAt}g). \quad (3.18)$$

Für $\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ ist offenbar $A\varepsilon g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$. Da $\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ eine Isometrie ist, sehen wir durch Ableiten der stark-stetigen unitären Gruppe in Gl. (3.18), dass $g \in D(A)$ und $A(\varepsilon g) = \varepsilon(Ag)$. Sei $h := Ag$.

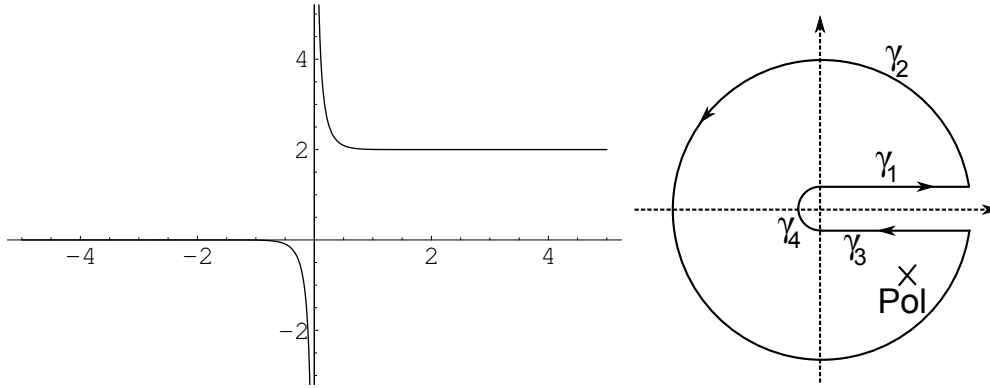


Abbildung 3.1.: Links: Graph der Funktion $[-5, 5] \setminus \{0\} \ni \lambda \mapsto 1 + \coth(\pi\lambda)$. Dies zeigt, dass die auslaufenden Anteile ($\lambda < 0$ in Impulsdarstellung) weitgehend abgeschnitten werden. Rechts: Integrationsweg γ in der komplexen Ebene, mit Pol bei $E - i\varepsilon$.

Wir erhalten $f_l = \mathcal{M}((\varepsilon h)_l) = \mathcal{M}((A\varepsilon g)_l) = \lambda \mathcal{M}((\varepsilon g)_l)$ und setzen $f_{l,0} := \mathcal{M}((\varepsilon g)_l) \in L^1(\mathbb{R} \times S^2)$. Dann ist

$$F_l(\lambda) = \int_{S^2} f_l(\lambda, \omega) \, d\omega = \lambda \int_{S^2} f_{l,0}(\lambda, \omega) \, d\omega = \lambda F_{l,0}(\lambda).$$

Es folgt

$$\int_{-1}^1 \frac{|F_l(\lambda)|}{|1 - e^{2\pi\lambda}|} \, d\lambda = \int_{-1}^1 |F_{l,0}(\lambda)| \underbrace{\frac{|\lambda|}{|1 - e^{2\pi\lambda}|}}_{\leq C} \, d\lambda < \infty. \quad \square$$

Wir führen noch die Berechnung des für den Beweis von Theorem 3.2.3 benötigten Integrals als Lemma auf.

Lemma 3.2.6. Für $E \in (0, \Lambda)$, $\varepsilon \in (0, \Lambda - E)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\int_0^\Lambda \frac{w^{-i\lambda}}{\omega - (E - i\varepsilon)} \, d\omega = 2\pi i \frac{e^{-i\lambda \log(E - i\varepsilon)}}{1 - e^{2\pi\lambda}} - \Lambda^{-i\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{E - i\varepsilon}{\Lambda} \right)^k \frac{1}{k + i\lambda}.$$

Beweis. Wir schreiben $\omega^{-i\lambda} = \exp(-i\lambda \log(\omega))$ und wählen einen Zweig des Logarithmus mit Definitionsbereich $D := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ und mit Repräsentant der Argumentfunktion mit Wertebereich $(0, 2\pi)$. Der Integrand hat dann als holomorphe Funktion $f_\varepsilon(z) = \frac{e^{-i\lambda \log(z)}}{z - (E - i\varepsilon)}$ den Definitionsbereich $D \setminus \{E - i\varepsilon\}$. Es handelt sich bei $\omega = E - i\varepsilon$ um einen einfachen Pol.

Der Residuensatz liefert mit dem geschlossenen Integrationsweg γ (vgl. Abb. 3.1)

$$\oint_\gamma \frac{e^{-i\lambda \log(z)}}{z - (E - i\varepsilon)} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(E - i\varepsilon) = 2\pi i e^{-i\lambda \log(E - i\varepsilon)}.$$

Wir betrachten die Beiträge der verschiedenen Teilstücke des Integrationsweges γ . Das Integral entlang $\gamma_1(t) = t + i\delta$, $t \in [0, \Lambda]$, ist für $\delta \rightarrow 0+$ gerade das zu berechnende

Integral. Das Integral entlang $\gamma_3(t) = -t - i\delta$ gibt für $\delta \rightarrow 0+$ das zu berechnende Integral mal einen Faktor $-e^{-2\pi\lambda}$, da $-i\delta$ im Logarithmus für $\delta \rightarrow 0+$ den Winkel 2π liefert. Der Weg γ_4 ist als Halbkreis mit Radius δ und Mittelpunkt 0 definiert; dieses Integral verschwindet für $\delta \rightarrow 0+$. Das Integral entlang des Kreisbogens γ_2 mit Radius Λ wird für $\delta \rightarrow 0+$ zu einem Integral über den ganzen Kreis. Also im Limes $\delta \rightarrow 0+$:

$$2\pi i e^{-i\lambda \log(E-i\varepsilon)} = \int_0^\Lambda f_\varepsilon(t) dt + (-e^{2\pi\lambda}) \int_0^\Lambda f_\varepsilon(t) dt + (i\Lambda^{-i\lambda}) \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda t} e^{it} dt}{e^{it} - (E-i\varepsilon)/\Lambda}.$$

Den letzten dieser Summanden schreiben wir mit geometrischer Reihe und integrieren gliedweise:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda t} e^{it}}{e^{it} - (E-i\varepsilon)/\Lambda} dt &= \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{E-i\varepsilon}{\Lambda e^{it}} \right)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{E-i\varepsilon}{\Lambda} \right)^k \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} e^{-itk} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{E-i\varepsilon}{\Lambda} \right)^k \frac{e^{2\pi\lambda} - 1}{\lambda - ik}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Der harmonische Oszillator mit Kopplung ans quantisierte Feld

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf den Fall eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators, welcher in Dipolnäherung an das quantisierte elektromagnetische Feld gekoppelt ist. In diesem Fall ist der Hamilton-Operator quadratisch und die Bewegungsgleichungen lassen sich explizit lösen; wir können darauf basierend zeigen, dass Resonanzen des Oszillators im Wesentlichen exponentiell relaxieren (Korollar 4.2.4).

Wir interessieren uns also für das Verhalten angeregter Zustände des Oszillators unter der Zeitentwicklung erzeugt vom Hamilton-Operator

$$H = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}_\rho)^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\mathbf{x}^2 + H_f \quad \text{auf} \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}, \quad (4.1)$$

wobei $\mathbf{A}_\rho := \int \mathbf{A}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$ das um den Ursprung mit der Ladungsverteilung ρ ausgeschmierte in Coulomb-Eichung quantisierte Vektorpotential ist.

Die Funktion $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ sei nicht-negativ, rotationsinvariant und normiert auf $\int \rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x} = 1$. Weiter sei $\text{supp } \rho \subset B_{1/\Lambda}(0)$ mit $\Lambda > 0$. (4.2)

Es sind $m > 0$, $\omega_0 > 0$ Masse und Frequenz des Oszillators ohne Kopplung ans Feld und $e \in \mathbb{R}$ die Elektronladung, mit welcher der Oszillator ans elektromagnetische Feld koppelt. Man beachte die von den vorigen Kapiteln verschiedene Wahl der Einheiten. Der Formfaktor und UV-Cutoff $\hat{\rho}$ ist unter obigen Voraussetzungen reellwertig und rotationsinvariant. Es entspricht $\Lambda \rightarrow \infty$ der Entfernung des UV-Cutoffs oder anders interpretiert dem Limes von ausgedehnter Ladungsverteilung zum Punktteilchen, wir arbeiten aber mit festem $\Lambda < \infty$.

Der Hamilton-Operator (4.1) ist selbstadjungiert auf $D(H) = D(\mathbf{p}^2) \cap D(\mathbf{x}^2) \cap D(H_f)$ [Ara91]. Er besitzt einen (bis auf eine Phase) eindeutigen Grundzustand ψ_g [Spo97], dessen Energie-Eigenwert wir mit E bezeichnen.

Arai [Ara83] konstruiert für das Modell mit Wick-geordnetem Wechselwirkungsterm rigoros die Lösung der Heisenberg-Gleichungen und diskutiert Spektrum, Asymptotische Vollständigkeit, Streumatrix und den Limes für die Entfernung des Ultraviolett-Cutoffs. Im einfacheren Modell eines eindimensionalen Oszillators gekoppelt an ein skalares Feld diskutiert Arai diese Punkte in [Ara81]. Formal haben Thirring und Schwabl Phänomene in diesem einfacheren Modell in Hinblick auf Laserstrahlung berechnet [ST64], jedoch nur im Limes der Entfernung des UV-Cutoffs mit einer Renormierungsprozedur, welche die auftretenden Gleichungen deutlich vereinfacht. Spohn [Spo97] zeigt rigoros asymptotische Vollständigkeit der Rayleigh-Streuung für den harmonischen Oszillator mit

kleiner anharmonischer Störung des Potentials. Die Abweichung von der harmonischen Zeitentwicklung behandelt er mittels Dyson-Reihe.

4.1. Lösung in der klassischen Elektrodynamik

Die Dynamik des quantenmechanischen Systems (4.1) ist einfacher als im Falle z. B. eines Coulomb-Potentials, da für quadratische Hamilton-Operatoren die quantenmechanische Zeitentwicklung der Weyl-Operatoren durch die Lösung der entsprechenden klassischen Bewegungsgleichungen ausgedrückt werden kann (Lemma 4.2.1) und die Bewegungsgleichungen linear sind. Um die Relaxationsgeschwindigkeit des quantenmechanischen Modells zu bestimmen, lösen wir daher als ersten Schritt die klassischen Bewegungsgleichungen mit geeigneten Anfangsbedingungen.

Auch unabhängig vom quantenmechanischen Modell ist die Lösung des klassischen Modells schon von Interesse. In der Literatur finden sich einige Behandlungen [AB76] [Ste83] eines eindimensionalen Oszillators gekoppelt an ein skalares Feld, welche mittels Laplace-Transformation Lösungen konstruieren. Diese machen allerdings alle von speziellen Ladungsverteilungen oder UV-Cutoffs Gebrauch, sind nicht rigoros oder diskutieren Abfalleigenschaften der Laplace-Transformierten (welche zur Rücktransformation via Residuensatz Voraussetzung sind) unzureichend. Eine analoge Behandlung des Problems in der Elektrodynamik existiert auch [RZ76], mit ähnlichen Unzulänglichkeiten allerdings. Eine direkte Lösung ohne Fourier- oder Laplace-Transformation ist möglich, allerdings nur mit Ladungsverteilung als charakteristische Funktion gewählt [HS89]. Physikalisch interessant wäre z. B. zu sehen, wie der Oszillator unter Abstrahlung elektromagnetischer Wellen zum Potentialminimum relaxiert.

Wir liefern eine Lösung des klassischen Modells welche bis auf einen für $t \rightarrow \infty$ schnell verschwindenden Fehlerterm explizit anschreibbar ist.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ die klassische Ortskoordinate des Oszillators, mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ den Impuls, mit $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das klassische Vektorpotential und mit $\boldsymbol{\pi} = -\mathbf{E} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das kanonisch konjugierte Feld zu \mathbf{A} (bis aufs Vorzeichen das elektrische Feld). Wir arbeiten wie in der quantisierten Theorie in Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 = \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}$. Die klassische Hamilton-Funktion ist formal definiert durch

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\pi}) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A}_\rho)^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\mathbf{q}^2 + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})^2 + (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 d^3\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

wobei $\mathbf{A}_\rho = \int \mathbf{A}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$ das um den Ursprung mit der Ladungsverteilung ρ ausgeschmierte Vektorpotential ist. Für die Ladungsverteilung ρ des Teilchens gelte (4.2).

Wir verzichten auf eine rigorose Definition und übernehmen die kanonischen Bewegungsgleichungen direkt von Spohn [Spo97]. Sei $P(\mathbf{k})$ die transversale Projektion. Spohn gibt die Bewegungsgleichungen nach Fouriertransformation bzgl. der räumlichen Koor-

dinaten der Felder an:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt}(t) = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p}(t) + e \int d^3\mathbf{k}' \hat{\rho}(\mathbf{k}') P(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', t) \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) = -m\omega_0^2 \mathbf{q}(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = \hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k}, t) \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\pi}}}{\partial t}(\mathbf{k}, t) = -|\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) - e \hat{\rho}(\mathbf{k}) P(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{q}}{dt}(t) \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.7)$$

Sei \mathcal{D}_m der reelle Hilbertraum der Vektorfelder $\boldsymbol{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$ (Transversalität) und $\hat{\boldsymbol{\phi}} \sqrt{\omega^m} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Nach Spohn erzeugen die Bewegungsgleichungen einen Fluss in $\mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_{-1}$ (für die Felder als Funktionen der Ortsraumkoordinaten).

Das Anfangswertproblem ist linear, um die Lösungen zu berechnen bietet sich also Laplace-Transformation in der Zeitkoordinate an. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Anfangsbedingungen mit verschwindenden Feldern, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. (Würden wir nichtverschwindende Felder als Anfangsbedingung zulassen, so erwarten wir immer noch ein Relaxationsverhalten, falls die Anfangsfeldkonfigurationen im Unendlichen verschwinden.)

Lemma 4.1.1 (Existenz der Laplace-Transformierten). *Für Anfangsbedingungen mit verschwindenden Feldern sind die Lösungen der Bewegungsgleichungen (4.4) bis (4.7) so beschaffen, dass die Laplace-Transformierten außer für $\mathbf{k} = 0$ in der gesamten rechten Halbebene $\text{Re } z > 0$ existieren.*

Beweis. Wir schreiben $H(t) := H(\mathbf{q}(t), \mathbf{A}(t), \mathbf{p}(t), \boldsymbol{\pi}(t))$.

Die Gleichungen (4.6) und (4.7) für die Felder lösen wir für festes $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ als gewöhnliche DGL mit durch $\dot{\mathbf{q}}(t)$ vorgegebener Inhomogenität: Gleichung (4.6) in (4.7) eingesetzt gibt

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} + |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = -e \hat{\rho}(\mathbf{k}) P(\mathbf{k}) \dot{\mathbf{q}}(t).$$

Mit der Anfangsbedingung verschwindender Felder finden wir dafür folgende Lösung:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = \frac{e \hat{\rho}(\mathbf{k}) P(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \left(\cos(|\mathbf{k}|t) \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(s) \sin(|\mathbf{k}|s) ds - \sin(|\mathbf{k}|t) \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(s) \cos(|\mathbf{k}|s) ds \right). \quad (4.8)$$

Am räumlichen Abfall von $\hat{\rho}$ lesen wir via (4.8) ab, dass die Feldenergie

$$\int |\hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k}, t)|^2 + |\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)|^2 d^3\mathbf{k} \stackrel{\text{Plancherel}}{=} \int \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)^2 + (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 d^3\mathbf{x}$$

für alle t endlich ist. Außerdem zeigen wir unter Verwendung von (4.8), dass wir zur Berechnung von $dH(t)/dt$ die Ableitung unters Integral ziehen können. Damit finden wir unter Verwendung der Bewegungsgleichungen, dass $dH(t)/dt = 0$ (für diese Rechnung ist es nützlich in den Integralen mittels Plancherel zu den fouriertransformierten Größen überzugehen). Das beweist Energieerhaltung $H(t) = H(0) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Wir verwenden die Energieerhaltung um das Wachstum von $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ und punktweise das Wachstum der Felder abzuschätzen:

Sei $E := H(0)$. Die Hamilton-Funktion (4.3) besteht aus vier nicht-negativen Summanden. Wir sehen $m\omega_0^2\mathbf{q}(t)^2 \leq 2E$, also $|\mathbf{q}(t)| \leq C < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach (4.5) folgt $|\dot{\mathbf{p}}(t)| \leq C$ und daher $|\mathbf{p}(t)| \leq C(t+1)$ für alle $t \geq 0$.

Weiter ist $2E \geq \int (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2 d^3\mathbf{x} = \int |\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)|^2 d^3\mathbf{k}$. Da auf Grund der Coulomb-Eichung $\mathbf{k} \perp \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)$ gilt, ist $|\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)| = |\mathbf{k}| |\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)|$. Damit und mit Hölder:

$$\left| \int \hat{\rho}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \right| = \left| \int \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \right| \leq \left(\int \left| \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \right|^2 d^3\mathbf{k} \right)^{1/2} (2E)^{1/2} < \infty. \quad (4.9)$$

Aus (4.9) und (4.4) erhalten wir

$$|\dot{\mathbf{q}}(t)| \leq \frac{|\mathbf{p}(t)|}{m} + \frac{e}{m} \left| \int \hat{\rho}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \right| \leq C(t+1) \text{ für alle } t \geq 0. \quad (4.10)$$

Das zeitliche Wachstum der Felder schätzen wir mittels (4.8) und (4.10) ab:

$$|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t)| \leq \frac{|e| |\hat{\rho}(\mathbf{k})|}{|\mathbf{k}|} 2 \int_0^t |\dot{\mathbf{q}}(s)| ds \leq C \frac{|\hat{\rho}(\mathbf{k})|}{|\mathbf{k}|} (t^2 + 1).$$

Aus Gleichung (4.7) folgt jetzt $|\partial \hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k}, t)/\partial t| \leq C(\mathbf{k})(t^2 + 1)$ und daraus $|\hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k}, t)| \leq C(\mathbf{k})(t^3 + 1)$. Es wachsen \mathbf{q} , \mathbf{p} , $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$ und $\hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k})$ also höchstens wie t^3 an. \square

Die Laplace-Transformation \mathcal{L} in der Zeitkoordinate liefert:

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}](s)s - \mathbf{q}(0) = \frac{1}{m} \mathcal{L}[\mathbf{p}](s) + \frac{e}{m} \int d^3\mathbf{k}' \hat{\rho}(\mathbf{k}') P(\mathbf{k}') \mathcal{L}[\hat{\mathbf{A}}](\mathbf{k}', s) \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{p}](s)s - \mathbf{p}(0) = -m\omega_0^2 \mathcal{L}[\mathbf{q}](s) \quad (4.12)$$

$$\mathcal{L}[\hat{\mathbf{A}}](\mathbf{k}, s)s = \mathcal{L}[\hat{\boldsymbol{\pi}}](\mathbf{k}, s) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}[\hat{\boldsymbol{\pi}}](\mathbf{k}, s)s = -|\mathbf{k}|^2 \mathcal{L}[\hat{\mathbf{A}}](\mathbf{k}, s) - e\hat{\rho}(\mathbf{k})P(\mathbf{k}) (\mathcal{L}[\mathbf{q}](s)s - \mathbf{q}(0)) \quad (4.14)$$

Dieses System linearer Gleichungen lässt sich explizit nach $\mathcal{L}[\mathbf{q}]$, $\mathcal{L}[\mathbf{p}]$, $\mathcal{L}[\hat{\mathbf{A}}]$ und $\mathcal{L}[\hat{\boldsymbol{\pi}}]$ auflösen. Dabei verschwindet die Projektion $P(\mathbf{k})$ aus den Gleichungen durch Ausführen der Winkelintegration, denn es ist $\int_{S^2} d\Omega \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$. Wir erhalten Ausdrücke wie z. B.

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}](s) = \frac{\mathbf{p}(0) + \mathbf{q}(0) \left(ms + e^2 s \frac{2}{3} \int d^3\mathbf{k} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2 + s^2} \right)}{m\omega_0^2 + ms^2 + e^2 s \frac{2}{3} \int d^3\mathbf{k} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2 + s^2}}.$$

Das hier auftretende $\frac{2}{3}e^2 \int d^3\mathbf{k} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2 + s^2}$ ist als Funktion von s analytisch auf dem Gebiet $\text{Re } s > 0$. Wie Spohn setzen wir diese Funktion zu einer ganzen Funktion fort als

$$f(s) := \frac{2}{3}\alpha \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-s|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad \text{mit } \alpha := \frac{e^2}{4\pi}.$$

Für $\text{Re } s > 0$ zeigt Fouriertransformation der ρ die Übereinstimmung von $f(s)$ und $\frac{2}{3}e^2 \int d^3\mathbf{k} \frac{\hat{\rho}(\mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2 + s^2}$.

Lemma 4.1.2. *Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ganz, d. h. überall auf \mathbb{C} holomorph.*

Beweis. Nach dem Satz von Morera genügt zu zeigen: Die Funktion f ist stetig und erfüllt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für alle Dreiecke Δ in \mathbb{C} .

Da $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und die $1/|\mathbf{x}|$ -Singularität in \mathbb{R}^3 integrierbar ist, ist Stetigkeit durch eine elementare Abschätzung klar.

Da $z \mapsto e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ für festes \mathbf{x} und \mathbf{x}' analytisch ist, folgt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ falls sich die Integrale $\int_{\partial\Delta} dz$ und $\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}'$ vertauschen lassen. Nach Tonelli und Fubini genügt zu zeigen, dass $\int_{\partial\Delta} dz \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' |\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}| < \infty$. Mit der Abschätzung $|e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}| \leq \exp(\max_{z \in \partial\Delta} |\operatorname{Re} z| 2/\Lambda)$ ist dies klar. \square

Weiter führen wir die Funktion \hat{h} ein, definiert durch

$$\hat{h}(z)^{-1} := m(\omega_0^2 + z^2) + z^2 \frac{2}{3} \alpha \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.15)$$

Offenbar ist $z \mapsto \hat{h}(z)^{-1}$ eine ganze Funktion. Es wird sich zeigen, dass ihre Nullstellen Polen der Laplace-Transformierten entsprechen; rechnet man die Laplace-Rücktransformation mittels des Residuensatzes aus, so bestimmt die Lage der Pole das Abfallverhalten der Rücktransformierten, d. h. der Lösung der Bewegungsgleichungen. Die Lage der Pole von \hat{h} schätzen wir in Unterkapitel 4.1.1 ab. Wir verwenden von dort, dass (vorausgesetzt $\Lambda > (9 + 1/3)\omega_0$) für alle $S > \omega_0$ ein $\alpha_0 > 0$ existiert, sodass für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$

- im Bereich $\operatorname{Re} s > -S$ genau zwei Pole liegen;
- diese Pole negativen Realteil haben;
- keine Pole mit Realteil $-S$ auftreten.

Diese beiden Pole sind zueinander komplex konjugiert, da $\hat{h}(\bar{z}) = \overline{\hat{h}(z)}$.

$$\text{Wir bezeichnen die beiden genannten Pole mit } z_0 \text{ und } \bar{z}_0. \quad (4.16)$$

Durch \hat{h} und f ausgedrückt lauten die aufgelösten Gleichungen für die Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L}[\mathbf{q}](s) = \mathbf{p}(0)\hat{h}(s) + \mathbf{q}(0) \left(\frac{1}{s} - m\omega_0^2 \frac{\hat{h}(s)}{s} \right) \quad (4.17)$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{p}](s) = \mathbf{p}(0) \left(\frac{1}{s} - m\omega_0^2 \frac{\hat{h}(s)}{s} \right) - m\omega_0^2 \mathbf{q}(0)(m + f(s))\hat{h}(s) \quad (4.18)$$

$$\mathcal{L}[\hat{\pi}](\mathbf{k}, s) = -e\hat{\rho}(\mathbf{k})P(\mathbf{k}) \frac{s}{\mathbf{k}^2 + s^2} \left(s\mathbf{p}(0)\hat{h}(s) - \mathbf{q}(0)m\omega_0^2\hat{h}(s) \right) \quad (4.19)$$

$$\mathcal{L}[\hat{A}](\mathbf{k}, s) = -e\hat{\rho}(\mathbf{k})P(\mathbf{k}) \frac{1}{\mathbf{k}^2 + s^2} \left(s\mathbf{p}(0)\hat{h}(s) - \mathbf{q}(0)m\omega_0^2\hat{h}(s) \right). \quad (4.20)$$

Mit dem nächsten Lemma zeigen wir, wie sich die Lage der Pole auf die zeitlichen Abfalleigenschaften einer Laplace-Rücktransformierten auswirkt. Da wir keinen Abfall in Richtung $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$ voraussetzen können, behalten wir einen Fehlerterm aus der Anwendung des Residuensatzes bei.

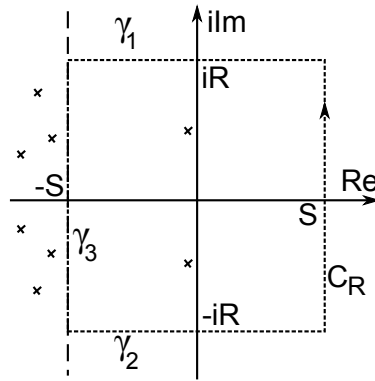


Abbildung 4.1.: Integrationsweg für die Anwendung des Residuensatzes in Lemma 4.1.3. Beispielhaft sind zwei Pole eingezeichnet, die zur Rücktransformation beitragen. Links von $\operatorname{Re} z = -S$ liegen evtl. weitere Pole. $C_R, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$: Teilstücke des Integrationsweges.

Lemma 4.1.3. Sei $S > 0$. Sei $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polen $z_k, k = 1 \dots n$, in $\mathbb{C}_S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -S\}$. Die z_k seien einfache Pole. Es besitze g keine Pole mit positivem Realteil und keine Pole mit Realteil $-S$. Ferner existiere eine Konstante K_S und ein $M > 0$, sodass

$$|g(z)| \leq K_S |\operatorname{Im} z|^{-2} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |\operatorname{Im} z| > M \text{ und } \operatorname{Re} z \in [-S, S].$$

Dann existieren eine Funktion $g_S(t)$ und eine Konstante C_S , sodass für alle $t > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}[g](t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(g, z_k) e^{z_k t} + e^{-St} g_S(t), \quad |g_S(t)| \leq C_S.$$

Beweis. Die Laplace-Rücktransformation ist für $t > 0$ gegeben durch

$$\mathcal{L}^{-1}[g](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{zt} g(z) dz,$$

wobei C_R der Integrationsweg $C_R(u) = S + iu$ mit $u \in [-R, R]$ ist.

Sei $R > \max_{k=1 \dots n} |\operatorname{Im} z_k|$. Betrachte den in Abb. 4.1 dargestellten geschlossenen Integrationsweg. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{zt} g(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(e^{zt} g(z), z_k) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} e^{zt} g(z) dz.$$

Die Residuen sind

$$\operatorname{Res}(e^{zt} g(z), z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) e^{zt} g(z) = e^{z_k t} \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) g(z)$$

Der Beitrag des Integrals über die Wege γ_1 und γ_2 wird folgendermaßen abgeschätzt: Es ist $\gamma_1(u) = u + iR, u \in [-S, S]$, also $|\int_{\gamma_1} e^{zt} g(z) dz| \leq e^{St} \int_{-S}^S |g(u + iR)| du$. Für den

Integranden haben wir nach Voraussetzung quadratischen Abfall bezüglich des Imaginärteils des Arguments. Im Limes $R \rightarrow \infty$ werden also die Integrale entlang γ_1 und γ_2 verschwinden.

Der Beitrag des Integrals entlang γ_3 ist:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{zt} g(z) dz &= - \int_{-R}^R e^{(-S+iu)t} g(-S+iu) i du \\ &= -i e^{-St} \int_{-R}^R e^{iut} g(-S+iu) du. \end{aligned}$$

Wir setzen $g_S(t) := -i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iut} g(-S+iu) du$. Wegen des Abfalls wie $1/u^2$ existiert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |g(-S+iu)| du =: C_S < \infty$. \square

Mit diesem Wissen machen wir uns an die Berechnung der Laplace-Rücktransformationen zu (4.17) und (4.18). Die Funktionen $\hat{h}(s)$, $\hat{h}(s)/s$ und $(m+f(s))\hat{h}(s)$ erfüllen nach Lemma 4.1.5 die Voraussetzungen von Lemma 4.1.3; dieses liefert mit $a_0 := \text{Res}(\hat{h}, z_0)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{h}](t) = a_0 e^{z_0 t} + \bar{a}_0 e^{\bar{z}_0 t} + e^{-St} g_S(t), \quad |g_S(t)| \leq C_S.$$

Wir verwenden g_S generisch für verschiedene Funktionen mit $|g_S(t)| \leq C_S$. Dann haben wir weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - m\omega_0^2 \frac{\hat{h}(s)}{s}\right](t) &= 1 - m\omega_0^2 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\hat{h}(s)}{s}\right](t) \\ &= 1 - m\omega_0^2 \left(\text{Res}\left(e^{st} \frac{\hat{h}(s)}{s}, 0\right) + \text{Res}\left(e^{st} \frac{\hat{h}(s)}{s}, z_0\right) + \text{Res}\left(e^{st} \frac{\hat{h}(s)}{s}, \bar{z}_0\right) + e^{-St} g_S(t) \right). \end{aligned}$$

Schreiben wir \hat{h} explizit aus, so sehen wir, dass $\text{Res}\left(e^{st} \frac{\hat{h}(s)}{s}, 0\right) = \frac{1}{m\omega_0^2}$. Es folgt

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - m\omega_0^2 \frac{\hat{h}(s)}{s}\right](t) = -m\omega_0^2 \left(\frac{a_0}{z_0} e^{z_0 t} + \text{c.c.} \right) + e^{-St} g_S(t).$$

Mit der Linearität von \mathcal{L}^{-1} erhalten wir somit

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(0) (a_0 e^{z_0 t} + \text{c.c.}) - \mathbf{q}(0) m\omega_0^2 \left(\frac{a_0}{z_0} e^{z_0 t} + \text{c.c.} \right) + e^{-St} g_S(t) \quad (4.21)$$

$$\mathbf{p}(t) = -\mathbf{p}(0) m\omega_0^2 \left(\frac{a_0}{z_0} e^{z_0 t} + \text{c.c.} \right) - m\omega_0^2 \mathbf{q}(0) ((m+f(z_0))a_0 e^{z_0 t} + \text{c.c.}) + e^{-St} g_S(t). \quad (4.22)$$

Es bleibt noch die Rücktransformation von (4.19) und (4.20) zu berechnen. Mit der Linearität von \mathcal{L}^{-1} haben wir zunächst

$$\hat{\pi}(\mathbf{k}, t) = -e^{\hat{\rho}(\mathbf{k})} P(\mathbf{k}) (\mathbf{p}(0) l_2(t) - \mathbf{q}(0) m\omega_0^2 l_1(t)) \quad (4.23)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) = -e^{\hat{\rho}(\mathbf{k})} P(\mathbf{k}) (\mathbf{p}(0) l_1(t) - \mathbf{q}(0) m\omega_0^2 l_0(t)), \quad (4.24)$$

wofür zu berechnen sind

$$l_i(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^i \hat{h}(s)}{s^2 + \mathbf{k}^2}\right] \quad \text{mit } i = 0, 1, 2. \quad (4.25)$$

Die Rücktransformierten (4.25) können wir wie in Lemma 4.1.3 durch die Residuen und einen Fehlerterm ausdrücken, einziger Unterschied hier wird sein, dass wir den Fehlerterm detaillierter abschätzen um seine \mathbf{k} -Abhängigkeit zu kontrollieren. Da $\hat{\rho}(\mathbf{k})$ wie eine beliebige Potenz $(1 + |\mathbf{k}|)^{-n}$ abfällt, sind in $|\mathbf{k}|$ polynomial wachsende Fehlerterme akzeptabel: zusammengenommen ergibt sich immer noch eine bzgl. \mathbf{k} beschränkte und schnell abfallende Funktion.

In (4.25) haben wir einfache Pole bei $s = \pm i|\mathbf{k}|$ zusätzlich zu den Polen z_0 und \bar{z}_0 von \hat{h} . Die Residuen bei $s = z_0$ und $s = \bar{z}_0$ liefern exponentiell abfallende Terme $e^{z_0 t}$ und $e^{\bar{z}_0 t}$. Für die Residuen bei $s = \pm i|\mathbf{k}|$ ist der Exponentialfaktor $e^{\pm i|\mathbf{k}|t}$ oszillierend.

- Wir machen die Berechnung von l_1 detailliert. Wir verwenden den Residuensatz mit dem Integrationsweg wie im Beweis von Lemma 4.1.3. Es fällt $\frac{s\hat{h}(s)}{(s+i|\mathbf{k}|)(s-i|\mathbf{k}|)}$ wie $|\text{Im } s|^{-3}$ ab, die Beiträge der Wege γ_1 und γ_2 verschwinden für $R \rightarrow \infty$ also. Schreiben wir noch den von γ_3 stammenden Fehlerterm explizit an, so erhalten wir

$$l_1(t) = \left(\frac{z_0 a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2} e^{i|\mathbf{k}|t} + \text{c.c.} \right) \quad (4.26)$$

$$+ (-i)e^{-St} \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iut} \frac{(-S + iu)\hat{h}(-S + iu)}{(-S + iu + i|\mathbf{k}|)(-S + iu - i|\mathbf{k}|)} du}_{=: g_S(|\mathbf{k}|, t)}. \quad (4.27)$$

Für den Integranden in (4.27) haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{iut}(-S + iu)\hat{h}(-S + iu)}{(-S + iu + i|\mathbf{k}|)(-S + iu - i|\mathbf{k}|)} \right| &\leq \left| \frac{\hat{h}(-S + iu)}{-S + iu - i|\mathbf{k}|} + \frac{i|\mathbf{k}|\hat{h}(-S + iu)}{(-S + iu)^2 + \mathbf{k}^2} \right| \\ &\leq (1 + |\mathbf{k}|)\mathcal{O}(|u|^{-2}). \end{aligned}$$

Der Abfall wie $1/|u|^2$ genügt für Integrierbarkeit von $-\infty$ bis ∞ und wir erhalten damit $|g_S(|\mathbf{k}|, t)| \leq (1 + |\mathbf{k}|)C_S$.

- Analog erhalten wir für l_0

$$l_0(t) = \left(\frac{a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2i|\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}|t} + \text{c.c.} \right) + e^{-St} g_S(|\mathbf{k}|, t) \quad (4.28)$$

mit Fehlerterm $|g_S(|\mathbf{k}|, t)| \leq C_S$.

- Für l_2 erhalten wir

$$l_2(t) = \left(\frac{z_0^2 a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{i|\mathbf{k}|\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2} e^{i|\mathbf{k}|t} + \text{c.c.} \right) + e^{-St} g_S(|\mathbf{k}|, t) \quad (4.29)$$

mit Fehlerterm $|g_S(|\mathbf{k}|, t)| \leq (1 + |\mathbf{k}|^2)C_S$.

Wir fassen das Ergebnis dieser Rechnungen als Theorem zusammen:

Theorem 4.1.4 (Lösung des klassischen AWP). *Die Ladungsverteilung ρ erfülle (4.2) mit $\Lambda > (9 + 1/3)\omega_0$ und es sei $S > \omega_0$. Wir definieren \hat{h} gemäß (4.15), z_0 durch die Pole von \hat{h} gemäß (4.16) und $a_0 := \text{Res}(\hat{h}, z_0)$.*

Dann existiert $\alpha_0 > 0$, sodass für $\alpha \in (0, \alpha_0)$ die Lösung der kanonischen Bewegungsgleichungen (4.4) bis (4.7) mit Anfangsbedingung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und } \mathbf{p}(0) \text{ und } \mathbf{q}(0) \text{ beliebig}$$

für $t > 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{p}(0) (a_0 e^{z_0 t} + c.c.) - \mathbf{q}(0) m \omega_0^2 \left(\frac{a_0}{z_0} e^{z_0 t} + c.c. \right) + e^{-St} g_S(t) \\ \mathbf{p}(t) &= -\mathbf{p}(0) m \omega_0^2 \left(\frac{a_0}{z_0} e^{z_0 t} + c.c. \right) - \mathbf{q}(0) m \omega_0^2 \left(-m \omega_0^2 \frac{a_0}{z_0^2} e^{z_0 t} + c.c. \right) + e^{-St} g_S(t) \\ \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, t) &= -e^{\hat{\rho}(\mathbf{k})} P(\mathbf{k}) \left[\mathbf{p}(0) \left(\frac{z_0 a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2} e^{i|\mathbf{k}|t} + c.c. \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{q}(0) m \omega_0^2 \left(\frac{a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2i|\mathbf{k}|} e^{i|\mathbf{k}|t} + c.c. \right) \right] + P(\mathbf{k}) e^{-St} \mathbf{g}_S(|\mathbf{k}|, t) \\ \hat{\boldsymbol{\pi}}(\mathbf{k}, t) &= -e^{\hat{\rho}(\mathbf{k})} P(\mathbf{k}) \left[\mathbf{p}(0) \left(\frac{z_0^2 a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{i|\mathbf{k}| \hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2} e^{i|\mathbf{k}|t} + c.c. \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{q}(0) m \omega_0^2 \left(\frac{z_0 a_0}{(z_0 + i|\mathbf{k}|)(z_0 - i|\mathbf{k}|)} e^{z_0 t} + \frac{\hat{h}(i|\mathbf{k}|)}{2} e^{i|\mathbf{k}|t} + c.c. \right) \right] + P(\mathbf{k}) e^{-St} \mathbf{g}_S(|\mathbf{k}|, t). \end{aligned}$$

Die Fehlerterme erfüllen (mit C_S einer S -abhängigen Konstante und $n \in \mathbb{N}$ beliebig):

$$|g_S(t)| \leq C_S, \quad |\mathbf{g}_S(|\mathbf{k}|, t)| \leq C_{S,n} (1 + |\mathbf{k}|)^{-n} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, t > 0. \quad (4.30)$$

Bemerkungen: Da $\hat{\rho}(\mathbf{k})$ rotationssymmetrisch ist, hängen die Lösungen abgesehen von der transversalen Projektion nur von $|\mathbf{k}|$ ab.

Die g_S , \mathbf{g}_S und C_S stehen generisch für Funktionen bzw. Konstanten, die von Gleichung zu Gleichung verschieden sein können. Insbesondere werden sie von den Anfangswerten $\mathbf{p}(0)$ und $\mathbf{q}(0)$ abhängen.

Für $t = 0$ stimmen diese Ausdrücke (wie es allgemein Eigenschaft der Laplace-Rücktransformationsformel ist) nicht mit der Lösung des AWP's überein.

Beweis. Für α ausreichend klein sind nach Theorem 4.1.9 die Punkte vor (4.16) erfüllt. Es genügt nun (4.21) bis (4.29) zusammenzufassen. Zu (4.22) sei angemerkt, dass $m + f(z_0) = -m\omega_0^2/z_0^2$, da $0 = \hat{h}(z_0)^{-1} = m\omega_0^2 + mz_0^2 + z_0^2 f(z_0)$.

Um für $\mathbf{g}_S(|\mathbf{k}|, t)$ die Schranke (4.30) zu finden, benutzen wir $|\hat{\rho}(\mathbf{k})| \leq C_n (1 + |\mathbf{k}|)^{-n}$. \square

Insbesondere zeigt Theorem 4.1.4, dass

$$|\mathbf{q}(t)|, |\mathbf{p}(t)| \leq C e^{-|\operatorname{Re} z_0|t} \quad \forall t > 0, \quad (4.31)$$

wohingegen die Felder $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\boldsymbol{\pi}}$ rein oszillierende Anteile (d. h. mit Zeitabhängigkeit $e^{\pm i|\mathbf{k}|t}$) haben. Der harmonische Oszillator relaxiert also unter Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen exponentiell. Im folgenden Unterkapitel werden wir die Relaxationsrate $|\operatorname{Re} z_0|$ abschätzen.

Wir hängen hier noch ein zuvor verwendetes Lemma zur Abschätzung von \hat{h} und f an:

Lemma 4.1.5. *Sei $S \geq 0$. Dann existiert eine Konstante K_S , sodass für alle z mit $\operatorname{Re} z \in [-S, S]$ und $\operatorname{Im} z \neq 0$ gilt*

$$|f(z)| \leq K_S |\operatorname{Im} z|^{-1}$$

und ferner existiert ein $M > 0$, sodass für $|\operatorname{Im} z| > M$ und $\operatorname{Re} z \in [-S, S]$ gilt

$$|\hat{h}(z)| \leq K_S |\operatorname{Im} z|^{-2}.$$

Beweis. Zuerst bringen wir f in eine leichter abschätzbare Form. Da der Integrand invariant ist unter Vertauschung von \mathbf{x} mit \mathbf{x}' haben wir

$$\int d^3 \mathbf{x} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = 2 \int d^3 \mathbf{x} \int_{|\mathbf{x}'| \geq |\mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Wir schreiben nun das Integral über \mathbf{x}' in Kugelkoordinaten. Dabei nehmen wir den Winkel zwischen \mathbf{x}' und \mathbf{x} als Polarwinkel θ . Der Integrand ist dann unabhängig vom Azimutwinkel $\phi \in (0, 2\pi)$, das Integral über ϕ liefert also einfach einen Faktor 2π . Nun setzen wir $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}'|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{x}'|\cos\theta}$ ein und substituieren $u := \cos\theta$; das Integral über u ist leicht ausrechenbar.

Wir gehen nun mit dem Integral über \mathbf{x} zu Kugelkoordinaten mit Winkeln $\tilde{\theta}, \tilde{\phi}$ über. Wir sehen, dass der Integrand auf Grund der obigen Wahl von θ nicht von $\tilde{\theta}$ und $\tilde{\phi}$ abhängig ist, diese liefern also integriert nur einen Faktor 4π . Wir erhalten unter Verwendung der Rotationsinvarianz von ρ und mit $r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|$ somit

$$f(z) = \frac{2}{3} \alpha \frac{(4\pi)^2}{z} \int_0^\infty dr r \rho(r) (e^{rz} - e^{-rz}) \int_r^\infty dr' r' \rho(r') e^{-r'z}.$$

Wegen $\operatorname{Re} z \in [-S, S]$ sind $|e^{rz}|$ und $|e^{-rz}|$ durch e^{rS} majorisiert, unabhängig von $\operatorname{Im} z$. Daher sehen wir am Vorfaktor $1/z$, dass $|f(z)| \leq C |\operatorname{Im} z|^{-1}$.

Wir wenden uns nun \hat{h} zu. Es sei $a = \operatorname{Re} z$ und $b = \operatorname{Im} z$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |\hat{h}(a+ib)^{-1}| &= \left| m(\omega_0^2 + (a+ib)^2) + (a+ib)^2 \frac{2}{3} \alpha \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} e^{-(a+ib)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right| \\ &\geq m |\omega_0^2 + (a+ib)^2| - |a+ib|^2 |f(a+ib)| \\ &\geq |a+ib|^2 (m - |f(a+ib)|) - m\omega_0^2 \\ &\geq b^2 (m - C|b|^{-1}) - m\omega_0^2. \end{aligned}$$

Für $|b|$ groß genug wird $m - C|b|^{-1} \geq m/2$. Also erhalten wir

$$|\hat{h}(a + ib)|^{-1} \geq b^2 m/2 - m\omega_0^2. \quad \square$$

4.1.1. Abschätzung der Relaxationsrate

Im Folgenden bestimmen wir die Lage der Pole von

$$z \mapsto \hat{h}(z) = \left(m(\omega_0^2 + z^2) + z^2 \frac{2}{3} \alpha \int d^3 \mathbf{x} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right)^{-1}.$$

Die Pole bestimmen das Abfallverhalten der Lösungen der Bewegungsgleichungen. *Wir schreiben in diesem Unterkapitel $\hat{h}^{-1} : z \mapsto \hat{h}(z)^{-1} = 1/\hat{h}(z)$ für den Kehrwert, nicht die Umkehrfunktion.* Wir erinnern ferner daran, dass $\hat{h}(\bar{z}) = \overline{\hat{h}(z)}$.

Für $\alpha = 0$ liegen die Nullstellen von \hat{h}^{-1} offenbar bei $z(0) = \pm i\omega_0$; wir betrachten den Fall $\alpha > 0$ als Störung und verwenden den Satz von Rouché und das Implizite-Funktionen-Theorem um die Lage der verschobenen Nullstellen zu bestimmen. (Der Satz von Rouché wird einmal mit einem möglichst kleinen Gebiet und einmal mit einem möglichst großen Gebiet angewendet. Dadurch können wir die verschobenen Nullstellen im kleinen Gebiet lokalisieren und das Auftreten zusätzlicher Nullstellen im großen Gebiet ausschließen.)

Die Schwierigkeit beim Umgang mit \hat{h}^{-1} besteht darin, dass $e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$ im Integranden für $|z| \rightarrow \infty$ beliebig stark oszillieren und gleichzeitig im Betrag sehr groß werden kann, weshalb z. B. Stationäre-Phase-artige Ansätze zur Abschätzung des Integrals keinen Erfolg bringen. Liest man dieses Integral gut kontrollieren, so wären evtl. Pole mit großem negativem Realteil ausschließbar und die Fehlerterme in Theorem 4.1.4 eliminierbar. Eine analytische Fortsetzung wie bei Arai [Ara81] [Ara83] konstruiert ermöglicht zu zeigen, dass \hat{h}^{-1} nicht mehr als zwei Nullstellen besitzt, erfordert aber Voraussetzungen an $\hat{\rho}(\mathbf{k})$, welche zu unseren Voraussetzungen (4.2) inkompatibel sind.

Wir geben zunächst eine obere Schranke dafür an, wie weit für $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} > 0$ die Nullstellen von $\pm i\omega_0$ weg geschoben werden. Unsere Abschätzung ist offenbar verschärfbar, zu Gunsten einer einfachen Aussage verzichten wir aber darauf.

Lemma 4.1.6. *Sei $D(\rho) := \int d^3 \mathbf{x} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$. Es bezeichne im Folgenden e die Eulersche Zahl. Sei $\alpha \geq 0$ so klein, dass*

$$(1) \quad \alpha \frac{16\omega_0 D(\rho)e}{3m\Lambda} < 1 \quad \text{und} \quad (2) \quad \eta := \alpha \frac{8D(\rho)e}{3m} < 1.$$

Dann hat \hat{h}^{-1} genau eine Nullstelle z_0 im Ball $B_{\eta\omega_0}(i\omega_0) \subset \mathbb{C}$. Insbesondere gilt $-\eta\omega_0 < \text{Re } z_0$, genauso für die komplex-konjugierte Nullstelle \bar{z}_0 .

Bemerkung: Für $\Lambda > 2\omega_0$ folgt (1) bereits aus (2).

Beweis. Wir verwenden den Satz von Rouché. Sei $g(z) := m(\omega_0^2 + z^2)$; g hat die Nullstellen $\pm i\omega_0$. Wir beschränken uns auf die Nullstelle in der oberen Halbebene und werden

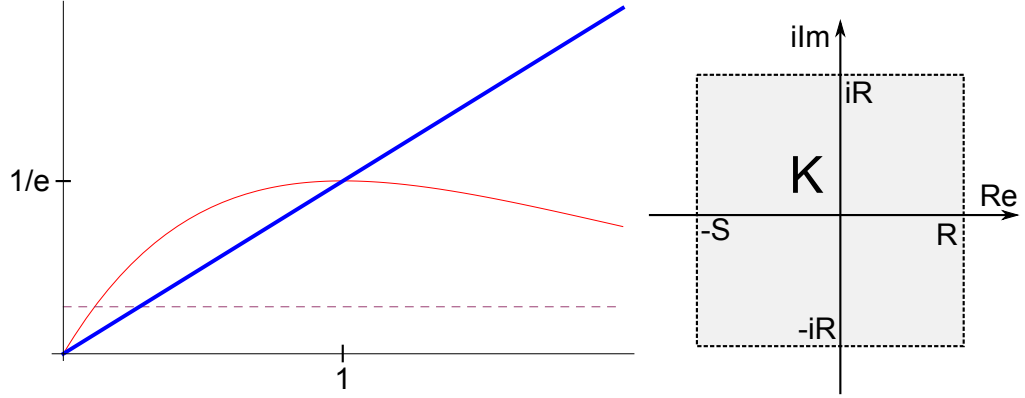


Abbildung 4.2.: Links: Zum Beweis von Lemma 4.1.6. Dünne Linie: Graph der Funktion $p : \delta \mapsto \delta \cdot e^{-\delta}$. Dicke Linie: Sekante durch Ursprung und Maximum von p . Gestrichelte Linie: Konstante Funktion $\delta \mapsto c_0$.

Rechts: Gebiet K für die Anwendung des Satz von Rouché in Lemma 4.1.7.

zeigen, dass $|\hat{h}^{-1}(z) - g(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \partial B_\varepsilon(i\omega)$ (wir nennen dies im weiteren Rouché-Ungleichung), wobei wir zu vorgegebenem α ein möglichst kleines $\varepsilon > 0$ konstruieren.

Sei $z = i\omega_0 + \varepsilon e^{it}$ mit $\varepsilon < \omega_0$. Wir schätzen die rechte Seite der Rouché-Ungleichung nach unten ab:

$$|\omega_0^2 + z^2| = |2i\omega_0\varepsilon + \varepsilon^2 e^{it}| \geq |2i\omega_0\varepsilon| - |\varepsilon^2 e^{it}| = 2\omega_0\varepsilon - \varepsilon^2 > 2\omega_0\varepsilon - \omega_0\varepsilon.$$

Wir schätzen die linke Seite der Rouché-Ungleichung nach oben ab:

$$|\hat{h}^{-1}(z) - g(z)| \leq |z|^2 \frac{2}{3} \alpha \int d^3 \mathbf{x} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-\text{Re } z |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} < e^{\varepsilon 2/\Lambda} \alpha \frac{8\omega_0^2 D(\rho)}{3}.$$

Hier haben wir verwendet, dass $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq 2/\Lambda$, $\text{Re } z \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ und $|z|^2 < 4\omega_0^2$.

Wir substituieren nun $\delta := \varepsilon 2/\Lambda$. Dann ist hinreichend für die Gültigkeit der Rouché-Ungleichung, dass hier die mittlere Ungleichung gilt:

$$|\hat{h}^{-1}(z) - g(z)| < e^\delta \alpha \frac{8\omega_0^2 D(\rho)}{3} \stackrel{\text{z.Z.}}{\leq} m\omega_0 \delta \Lambda / 2 < |g(z)|.$$

Die mittlere Ungleichung ist äquivalent zu $c_0 := \frac{\alpha 16\omega_0 D(\rho)}{3m\Lambda} \leq \delta e^{-\delta} =: p(\delta)$. (Die Funktion p hat das globale Maximum $(1, 1/e)$, daher die Voraussetzung $\alpha \frac{16\omega_0 D(\rho)}{3m\Lambda} < 1/e$ damit eine Lösung der Ungleichung existiert.) Wir suchen ein möglichst kleines δ mit $c_0 \leq p(\delta)$. Vergleiche dazu Abbildung 4.2: Da p links des Maximums konkav ist, erhalten wir ein δ welches die Ungleichung erfüllt folgendermaßen: Wir legen eine Sekante durch den Punkt $(0, 0)$ und das Maximum von p . Am Schnittpunkt δ_0 der Sekante $\delta \mapsto 1/e \cdot \delta$ mit der Geraden $\delta \mapsto c_0$ gilt offenbar $c_0 = 1/e \cdot \delta_0$, also

$$c_0 = 1/e \cdot \delta_0 \leq \delta_0 e^{-\delta_0}.$$

Nach Rücksubstitution von $\varepsilon = \delta\Lambda/2$ sehen wir, dass somit die Rouché-Ungleichung erfüllt ist für $\varepsilon = \alpha \frac{8D(\rho)e}{3m} \omega_0 = \eta\omega_0$. Also hat \hat{h}^{-1} genau eine Nullstelle in $B_{\eta\omega_0}(i\omega_0)$. \square

Mit dem folgenden Lemma schließen wir weitere Nullstellen außer den in Lemma 4.1.6 gefundenen weitgehend aus.

Lemma 4.1.7. *Sei $S > \omega_0$ und $\alpha \geq 0$ so klein, dass $\alpha \frac{2D(\rho)}{3m} < \left(1 - \frac{\omega_0^2}{S^2}\right) e^{-2S/\Lambda}$. Dann besitzt die Funktion \hat{h}^{-1} genau zwei (mit Vielfachheit gezählt) Nullstellen in $\mathbb{C}_S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -S\}$ und keine Nullstellen mit Realteil $-S$.*

Beweis. Wir verwenden den Satz von Rouché um mit der Funktion $z \mapsto m(\omega_0^2 + z^2)$ zu vergleichen. Sei $S > \omega_0$, $R \geq S$ und sei K das Gebiet wie in Abb. 4.2 skizziert. Zu zeigen ist die Rouché-Ungleichung

$$\frac{2}{3}\alpha \left| \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right| < m \left| 1 + \frac{\omega_0^2}{z^2} \right| \quad \forall z \in \partial K, \quad (4.32)$$

wobei wir bereits beidseitig durch $|z|^2$ geteilt haben.

Die linke Seite von (4.32) schätzen wir unter Verwendung von $\operatorname{Re} z \geq -S$ nach oben ab:

$$\frac{2}{3}\alpha \left| \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-z|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right| \leq \frac{2}{3}\alpha e^{2S/\Lambda} D(\rho). \quad (4.33)$$

Die rechte Seite von (4.32) schätzen wir nach unten ab, wobei wir verwenden, dass $|z| \geq S$:

$$m \left| 1 + \frac{\omega_0^2}{z^2} \right| \geq m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{|z|^2} \right) \geq m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{S^2} \right). \quad (4.34)$$

Da nach Voraussetzung $\frac{2}{3}\alpha e^{2S/\Lambda} D(\rho) < m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{S^2} \right)$ ist, gilt nach dem Satz von Rouché, dass \hat{h}^{-1} im Gebiet K genau zwei Nullstellen hat. Da R in dieser Ungleichung nicht auftaucht, können wir R beliebig groß wählen und so mit Gebieten K ganz \mathbb{C}_S abdecken. \square

Als nächstes geben wir eine untere Schranke dafür an, wie weit für $\alpha > 0$ die Nullstellen von $\pm i\omega_0$ weg geschoben werden.

Lemma 4.1.8. *Es existiert eine holomorphe Funktion $\alpha \mapsto z(\alpha)$, definiert auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von $\alpha = 0$, mit $z(0) = +i\omega_0$ und $\hat{h}^{-1}(z(\alpha)) = \hat{h}^{-1}(\overline{z(\alpha)}) = 0$ für alle $\alpha \in U$.*

Sei $\Lambda > (9 + \frac{1}{3})\omega_0$. Dann existiert ein $\alpha_0 > 0$, sodass für $\alpha \in (0, \alpha_0)$ gilt:

$$\operatorname{Re} z(\alpha) < -\alpha \frac{\omega_0}{3m} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{\sin(\omega_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} < 0$$

und

$$\operatorname{Im} z(\alpha) < \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{\cos(\omega_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right) < \omega_0.$$

Beweis. Wir betrachten wieder nur die Nullstelle in der oberen Halbebene. Wir setzen $f(\alpha, z) := \hat{h}^{-1}(z)$ und wissen, dass $f(0, +i\omega_0) = 0$. Es ist f als Funktion von $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2$ holomorph und $\frac{\partial f}{\partial z}(0, i\omega_0) \neq 0$. Nach dem Implizite-Funktionen-Theorem für holomorphe Funktionen [Kra82, Thm. 1.4.11] existiert auf einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von $\alpha = 0$ eine holomorphe Funktion $\alpha \mapsto z(\alpha)$ mit $f(\alpha, z(\alpha)) = 0$. Für die reell-analytische Funktion $\alpha \mapsto \operatorname{Re} z(\alpha)$ (für $\alpha \mapsto \operatorname{Im} z(\alpha)$ analog) haben wir die Taylorentwicklung:

$$\operatorname{Re} z(\alpha) = \operatorname{Re} z(0) + \alpha \operatorname{Re} z'(0) + \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{Re} z''(t), \quad t \in (0, \alpha).$$

Falls wir zeigen können, dass $\operatorname{Re} z''(0) < 0$, dann existiert ein $\alpha_0 > 0$, so dass $\operatorname{Re} z''(t) < 0$ für $t \in [0, \alpha_0)$, womit $\operatorname{Re} z(0) + \alpha \operatorname{Re} z'(0)$ zur oberen Schranke für $\operatorname{Re} z(\alpha)$ wird.

Berechnung der Ableitungen: Für die erste Ableitung berechnen wir einfach

$$z'(0) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0, z=i\omega_0}.$$

Für die zweite Ableitung liefert implizite Differentiation:

$$z''(\alpha) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^{-3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial z} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial z} \right) (\alpha, z(\alpha)).$$

Es ist $\partial^2 f / \partial \alpha^2 = 0$, alle anderen partiellen Ableitungen rechnen wir explizit aus und setzen $\alpha = 0$, $z = i\omega_0$ ein. Unter Verwendung von $\operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re} x - \operatorname{Im} y$ und $\operatorname{Re}(x \cdot y) = \operatorname{Re} x \cdot \operatorname{Re} y - \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$, erhalten wir (wir schreiben verkürzt $x = \mathbf{x}$ und $g = \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|}$)

$$\operatorname{Re} z''(0) \tag{4.35}$$

$$= \frac{32\omega_0^2}{9} \left[\int dx dx' g \cos(\omega_0|x-x'|) \cdot \int dx'' dx''' \rho(x'')\rho(x''') \cos(\omega_0|x''-x''') \right] \tag{4.36}$$

$$- \int dx dx' g \sin(\omega_0|x-x'|) \cdot \int dx'' dx''' \rho(x'')\rho(x''') \sin(\omega_0|x''-x''') \tag{4.37}$$

$$- \frac{4\omega_0}{3} \left[\left(\int dx dx' g \cos(\omega_0|x-x'|) \right)^2 - \left(\int dx dx' g \sin(\omega_0|x-x'|) \right)^2 \right]. \tag{4.38}$$

In Zeile (4.36) schätzen wir ab $\cos(\omega_0|x-x'|) \leq 1$.

In Zeile (4.37) verwenden wir, dass $0 \leq \omega_0|x-x'| \leq 2\omega_0/\Lambda < 2/(9 + \frac{1}{3})$ und daher $\sin(\omega_0|x-x'|)$ nicht-negativ ist, diese Zeile für eine obere Schranke also einfach weglassen werden kann.

In Zeile (4.38): Wegen $|x-x'| \leq 2/\Lambda$ können wir verwenden, dass $\cos(\omega_0|x-x'|) \geq 1 - 2\omega_0/\Lambda$ und $\sin(\omega_0|x-x'|) \leq 2\omega_0/\Lambda$.

Somit erhalten wir unter Benutzung von $\int \rho(x) dx = 1$:

$$\operatorname{Re} z''(0) \leq \underbrace{\frac{4\omega_0}{3} \int dx dx' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|}}_{\geq 0} \left(\frac{8\omega_0}{3} - \int dx dx' \frac{\rho(x)\rho(x')}{|x-x'|} \cdot \left(1 - 2\frac{2\omega_0}{\Lambda}\right) \right). \tag{4.39}$$

Mittels $|x - x'| \leq 2/\Lambda$ zeigen wir weiterhin $\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|x-x'|} \geq \int d\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) \int d\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}') \frac{\Lambda}{2} = \frac{\Lambda}{2}$. Aus Ungleichung (4.39) ersehen wir nun unter Verwendung von $\Lambda > (9 + \frac{1}{3})\omega_0$, dass $\operatorname{Re} z''(0) < 0$.

Für den Imaginärteil zeigt eine analoge Rechnung, dass $\operatorname{Im} z''(0) < 0$ für $\Lambda > 4\omega_0$, was die obere Schranke für $\operatorname{Im} z(\alpha)$ etabliert. \square

Nach den Lemmata 4.1.6 bis 4.1.8 erhalten wir folgendes qualitative Bild: Für $\alpha = 0$ hat \hat{h} Pole nur bei $\pm i\omega_0$. Nach Laplace-Rücktransformation entspricht dies einer Lösung, welche wie $e^{\pm i\omega_0 t}$ mit der Frequenz ω_0 des harmonischen Oszillators schwingt. Für $\alpha > 0$ verschieben sich die Polstellen z_0, \bar{z}_0 zu negativem Realteil und dem Betrag nach kleinerem Imaginärteil. Die Lösung verhält sich dann wie $e^{-|\operatorname{Re} z_0|t} e^{\pm i \operatorname{Im} z_0 t}$. Wir nennen daher $|\operatorname{Im} z_0|$ die Frequenz des gedämpften harmonischen Oszillators und $\gamma := |\operatorname{Re} z_0|$ die *Relaxationsrate*. Entsprechend betrachten wir $|\operatorname{Re} z_0|^{-1}$ als die Lebensdauer und $|\operatorname{Im} z_0|^{-1}$ als die Periodendauer.

Zum Vergleich der Größenordnungen sei erwähnt, dass wir aus den Parametern unseres Modells folgende typische Zeitskalen bilden können:

$$\frac{1}{\omega_0}, \frac{1}{\Lambda}, \frac{\alpha}{m}.$$

Theorem 4.1.9 (Abschätzung von Relaxationsrate und Frequenz). *Sei $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\rho(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) = 1$ und $\operatorname{supp} \rho \subset B_{1/\Lambda}(0)$ mit $\Lambda > (9 + \frac{1}{3})\omega_0$. Sei $S > \omega_0$ und $D(\rho) := \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$. Dann existiert $\alpha_0 > 0$, sodass gilt:*

Für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ hat \hat{h} in $\mathbb{C}_S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -S\}$ genau zwei Pole, $z_0 = z(\alpha)$ und $\bar{z}_0 = \bar{z}(\alpha)$. Außerdem hat \hat{h} keinen Pol mit Realteil $-S$. Die beiden Pole sind von erster Ordnung und erfüllen (mit e der Eulerschen Zahl):

$$-S < -\omega_0 < -\omega_0 \frac{\alpha}{3m} 8eD(\rho) < \operatorname{Re} z(\alpha) < -\frac{\alpha}{3m} \omega_0^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega_0}{\Lambda}\right)^2\right) < 0, \quad (4.40)$$

$$0 < \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} 8eD(\rho)\right) < \operatorname{Im} z(\alpha) < \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} \left(\frac{\Lambda}{2} - \omega_0\right)\right) < \omega_0. \quad (4.41)$$

Bemerkung: Rotationsinvarianz von ρ wird für dieses Theorem nicht benötigt.

Beweis. Für die oberen Schranken schätzen wir das Resultat von Lemma 4.1.8 weiter ab. Für den Realteil verwenden wir $\sin(\omega_0 y)/y \geq \omega_0 - \omega_0^3 y^2/6 \forall y \geq 0$, wobei $\sin(\omega_0 y)/y$ in $y = 0$ stetig fortgesetzt wird.

Für den Imaginärteil folgt aus $\cos(\omega_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \geq 1 - \omega_0 \frac{2}{\Lambda}$ und $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \geq \frac{\Lambda}{2}$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z(\alpha) &< \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{\cos(\omega_0 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right) \\ &\leq \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{1 - \omega_0 \frac{2}{\Lambda}}{2/\Lambda}\right) \leq \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha}{3m} \left(\frac{\Lambda}{2} - \omega_0\right)\right). \end{aligned}$$

Die unteren Schranken stammen aus Lemma 4.1.6. \square

Wir vergleichen unser Ergebnis für die Relaxation des harmonischen Oszillators durch Strahlungsdämpfung mit dem Ergebnis formaler Rechnungen, siehe z. B. Jackson [Jac75, Section 17.7]. Jackson konstruiert ausgehend von der Energieerhaltung eine Bewegungsgleichung, welche die Dämpfung durch Abstrahlung beinhaltet und berechnet damit, dass näherungsweise

$$q(t) = q_0 e^{-zt} \quad \text{mit } z = \frac{\alpha}{3m} \omega_0^2 \pm i\omega_0 \left(1 - \frac{5\omega_0^2 \alpha^2}{18m^2}\right).$$

Nehmen wir in der oberen Schranke aus (4.40) den Punktladungslimes $\Lambda \rightarrow \infty$, so stimmt die Schranke mit Jacksons Relaxationsrate überein.

Auffällig ist die Diskrepanz zwischen Jacksons Ergebnis für den Imaginärteil und unserer Abschätzung (4.41): Jacksons Näherung liefert erst in Ordnung α^2 einen Beitrag zur Frequenzverschiebung, während wir schon in Ordnung α einen Beitrag haben. Arai [Ara83] findet jedoch wie wir bereits in Ordnung α eine Frequenzverschiebung. Auch die formale quantenmechanische Berechnung des Lamb-Shifts nach Bethe liefert Energiekorrekturen in Ordnung α . Dowling [Dow98] zweifelt Jacksons Modell der Strahlungsdämpfung an und gibt eine formale Rechnung an, welche eine klassische Frequenzverschiebung in Ordnung α liefert. (Der Titel von Dowlings Paper, „Why Jackson is Wrong!“, bezieht sich auf eine Behauptung Jacksons, kein klassisches Modell könne wie die quantenmechanische Rechnung einen Lamb-Shift in Ordnung α liefern.)

Unsere Rechnung zeigt rigoros, dass ein einfaches klassisches Modell eine Frequenzverschiebung in Ordnung α liefern kann.

4.2. Relaxation im quantenelektrodynamischen Modell

Wir wollen nun die Lösung des klassischen Modells (4.3) auf das quantenelektrodynamische Modell (4.1) übertragen.

Sei $u = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\phi}_2) \in \mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_{-1}$. (Es wird sich zeitentwickeln $\boldsymbol{\alpha}_1$ wie die klassische Ortskoordinate, $\boldsymbol{\alpha}_2$ wie der klassische Impuls, $\boldsymbol{\phi}_1$ wie das klassische Vektorpotential und $\boldsymbol{\phi}_2$ wie das klassische kanonisch konjugierte Feld.) Sei von nun an \boldsymbol{p} der Impulsoperator, \boldsymbol{x} der Ortsoperator, \boldsymbol{A} das quantisierte Vektorpotential und $\boldsymbol{\pi}$ das zu \boldsymbol{A} kanonisch konjugierte quantisierte Feld. Wir führen formal ein

$$\langle u, Jx \rangle = \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{p} - \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{x} + \int d^3\boldsymbol{x} \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) - \int d^3\boldsymbol{x} \boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \quad (4.42)$$

(Das J steht formal für die Matrix der symplektischen Form. Wir lassen die Matrix an anderer Stelle auftauchen als Spohn [Spo97], daher weichen unsere Definitionen durch Vertauschungen und Vorzeichen von seinen ab.) Es sind hier \boldsymbol{A} und $\boldsymbol{\pi}$ ohne UV-Cutoff gemeint, d. h. die operatorwertigen Distributionen, welche durch Integration mit einer Testfunktion zu selbstadjungierten Operatoren werden.

Wir setzen in (4.42) die expliziten Ausdrücke für die quantisierten Felder ein:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\boldsymbol{k} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}, \lambda) \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}} (2\pi)^{-3/2} \left(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} a^*(\boldsymbol{k}, \lambda) + e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} a(\boldsymbol{k}, \lambda) \right),$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\mathbf{k} \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) i\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}} (2\pi)^{-3/2} \left(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a^*(\mathbf{k}, \lambda) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a(\mathbf{k}, \lambda) \right).$$

So kommen wir zur Definition

$$\langle u, Jx \rangle := \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{x} + a^*(\phi) + a(\phi), \quad (4.43)$$

mit $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ definiert durch

$$\phi(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \left(i\sqrt{|\mathbf{k}|} \hat{\phi}_1(\mathbf{k}) - \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{k}|}} \hat{\phi}_2(\mathbf{k}) \right). \quad (4.44)$$

Lemma 4.2.1 (Zeitentwicklung von Weyl-Operatoren). *Sei $u = (\boldsymbol{\alpha}_1, \phi_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \phi_2) \in \mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathcal{D}_{-1}$. Sei $u(t) = (\boldsymbol{\alpha}_1(t), \phi_1(t), \boldsymbol{\alpha}_2(t), \phi_2(t))$ die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen (4.4) bis (4.7) mit Anfangsbedingung $u(0) = u$. Sei D_S für alle $t > 0$ ein definierender Bereich des Segal-Feldoperators $\frac{1}{\sqrt{2}} (a^*(\phi(t)) + a(\phi(t)))$, wobei $\phi(t)$ gemäß (4.44) definiert ist durch $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$.*

Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ der Operator $\langle u(t), Jx \rangle$ wesentlich selbstadjungiert mit $(D(\mathbf{p}) \cap D(\mathbf{x})) \otimes D_S \subset D(\overline{\langle u(t), Jx \rangle})$. Fortan schreiben wir $\langle u(t), Jx \rangle$ für $\overline{\langle u(t), Jx \rangle}$ und es gilt

$$e^{-iHt} e^{i\langle u, Jx \rangle} e^{iHt} = e^{i\langle u(t), Jx \rangle}.$$

Beweis. Bis auf die Wesentlich-Selbstadjungiertheit ist das Lemma von Spohn [Spo97] übernommen.

Zum Beweis der Wesentlich-Selbstadjungiertheit: Wir definieren auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ Auf- und Absteigeoperator des Harmonischen Oszillators

$$\alpha^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega_0}} p, \quad \alpha := \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega_0}} p. \quad (4.45)$$

Auf $D(B) := \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $B := \alpha_{1,1} p_1 - \alpha_{2,1} x_1$ symmetrisch und für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{C}$ schreibbar als:

$$B = \gamma \alpha + \bar{\gamma} \alpha^\dagger.$$

Wir setzen D als Raum endlicher Linearkombinationen von Hermite-Funktionen; dieser Raum ist offenbar invariant unter B . Es folgt mittels Nelsons Analytic-Vector-Theorem (in Form von [RS75, S. 203 Cor. 2] und mit der Abschätzung aus [RS75, S. 204 Example 2]), dass B wesentlich selbstadjungiert ist auf D .

Der Operator $C := \alpha_{1,1} p_1 - \alpha_{2,1} x_1$ auf $D(C) := D(x_1) \cap D(p_1)$ ist eine symmetrische Erweiterung von B . Wir haben also $B \subset C \subset C^* \subset B^*$, daher $C^* \supset (B^*)^* = \bar{B}$. Da $D(\bar{B})$ in \mathcal{H} dicht ist, ist auch $D(C^*)$ dicht; also nach [RS80, Thm. VIII.1] $(C^*)^* = \bar{C}$ und somit

$$C \subset \bar{C} = (C^*)^* \subset (\bar{B})^* = \bar{B}.$$

Folglich $D(x_1) \cap D(p_1) \subset D(\bar{B})$.

Mittels der Identifikation $L^2(\mathbb{R}^3) \cong \otimes^3 L^2(\mathbb{R})$ zieht man dies auf $\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{p} - \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \mathbf{x}$ hoch. \square

Die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen kennen wir aus Theorem 4.1.4. Wir können nun also die Zeitentwicklung z.B. eines Aufsteigeoperators des Harmonischen Oszillators berechnen. Da der Hamilton-Operator rotationssymmetrisch ist [HH10, Section 5], betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den *Aufsteigeoperator* in x_1 -Raumrichtung,

$$\alpha^* := \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x_1 - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega_0}}p_1 : D \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (4.46)$$

wobei x_1 die erste Komponente des Ortsoperators, p_1 die erste Komponente des Impulsoperators und $D = D(x_1) \cap D(p_1)$ der Definitionsbereich des Aufsteigeoperators ist.

Theorem 4.2.2 (Zeitentwicklung des Aufsteigeoperators). *Sei H der Hamilton-Operator (4.1) und ρ erfülle (4.2) mit $\Lambda > (9 + 1/3)\omega_0$. Sei $\alpha_0 > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Sei z_0 gemäß (4.16) bestimmt. Dann ist für $t > 0$ die Zeitentwicklung des Aufsteigeoperators auf $D(H)$ gegeben durch*

$$e^{-iHt}\alpha^*e^{iHt} = b(t) + a^*(\phi_+(t)) + a(\phi_-(t)),$$

wobei $b(t)$ eine Familie von Operatoren mit $\|b(t)\psi\| \leq C(\psi, \alpha)e^{-\gamma t}$ für alle $\psi \in D(H)$ ist, $\gamma = |\operatorname{Re} z_0| > 0$ und die Funktionen ϕ_+ und ϕ_- definiert sind durch

$$\phi_{\pm}(\mathbf{k}, \lambda, t) = e^{\frac{i\sqrt{m\omega_0}}{2}\hat{\rho}(\mathbf{k})\varepsilon(\mathbf{k}, \lambda)_1} \frac{\hat{h}(-i|\mathbf{k}|)}{\sqrt{|\mathbf{k}|}} e^{-i|\mathbf{k}|t} (|\mathbf{k}| \pm \omega_0). \quad (4.47)$$

Beide Funktionen liegen in $L^2_{\omega}(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$. (Mit $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ wird die Elektronladung bezeichnet.)

Beweis. Sei $u_q = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, (-1, 0, 0), \mathbf{0})$ und $u_p = ((1, 0, 0), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, sei $\psi \in D(H)$. Wir wenden Lemma 4.2.1 auf $e^{i\langle u_q, Jx \rangle} \psi$ und $e^{i\langle u_p, Jx \rangle} \psi$ an. Die Zeitentwicklung mit diesen Anfangsbedingungen ist aus Theorem 4.1.4 bekannt.

Es liegt $e^{iHt}\psi$ in $D(H)$ und damit in $D(\mathbf{p}) \cap D(\mathbf{x})$. Weiter $\psi \in D(H) \subset D(H_f) \subset D((H_f + 1)^{1/2})$, und da für die explizite Lösung der Bewegungsgleichungen offensichtlich $\phi(t) \in L^2_{\omega}$ für alle $t > 0$ gilt, ist $D((H_f + 1)^{1/2})$ im Definitionsbereich des Segal-Feldoperators enthalten. Somit $\psi \in D(\langle u_p(t), Jx \rangle) \cap D(\langle u_q(t), Jx \rangle)$ nach Lemma 4.2.1. Wir können also in den Gleichungen $e^{-iHt}e^{i\langle u_j, Jx \rangle s} e^{iHt}\psi = e^{i\langle u_j(t), Jx \rangle s} \psi$ ($j = q, p$) auf beiden Seiten „ $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}$ “ anwenden und bilden daraus die Linearkombination

$$\sqrt{\frac{m\omega_0}{2}} \langle u_q(t), Jx \rangle \psi - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega_0}} \langle u_p(t), Jx \rangle \psi. \quad (4.48)$$

Für $t = 0$ ist dieser Ausdruck nach Wahl von u_q und u_p gerade $\alpha^*\psi$.

Für $t > 0$ schreiben wir (4.48) gemäß (4.43) aus und setzen die klassische Lösung ein. Dann sortieren wir nach relaxierenden Summanden (die einen Faktor $e^{z_0 t}$ oder e^{-St} beinhalten) und oszillierenden Summanden (die einen Faktor $e^{i|\mathbf{k}|t}$ beinhalten). Die oszillierenden Terme liefern ϕ_{\pm} . Die relaxierenden Terme werden in $b(t)$ zusammengefasst.

Zur Abschätzung von $\|b(t)\psi\|$ verwenden wir $\|\mathbf{x}\psi\| < \infty$ und $\|\mathbf{p}\psi\| < \infty$ und für die Terme mit Erzeugern und Vernichtern fügen wir $(H_f + 1)^{-1/2}(H_f + 1)^{1/2}$ ein und schätzen durch die ω -Norm ab. Die ω -Norm verschwindet exponentiell mit Rate $|\operatorname{Re} z_0| = \gamma$. \square

Wir sehen, dass ϕ_+ und ϕ_- mit dem Faktor $e^{-i|\mathbf{k}|t}$ genau der Zeitentwicklung freier Photonen unterliegen. Auffällig ist der Beitrag des Vernichtungsoperators $a(\phi_-(t))$. Auf den Grundzustand angewendet ist von diesem Operator nur

$$\|a(\phi_-(t))\psi_g\| \leq \frac{C_{n,\varepsilon}}{1+|t|^n} + \varepsilon$$

zu erwarten (vgl. Lemma 2.2.6). Also wird $a(\phi_-(t))\psi_g$ zu dem ansonsten exponentiellen Relaxationsverhalten eine Potenzgesetz-Abweichung hinzufügen. Dies ist nach Untersuchungen zur Überlebenswahrscheinlichkeit von Resonanzen auch zu erwartendes Verhalten, vgl. [Hun90] für die Idee und [BFS99, Thm. 3.5] für den Fall der Quantenelektrodynamik.

Korollar 4.2.3 (Asymptotischer Erzeuger). *Sei H der Hamilton-Operator (4.1) und ρ erfülle (4.2) mit $\Lambda > (9 + 1/3)\omega_0$. Sei $\alpha_0 > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0, \alpha_0)$.*

Dann ist $\alpha^\psi_g = a_+(\phi_+(0))\psi_g$.*

Beweis. Um $\alpha^*\psi_g = a_+(\phi_+(0))\psi_g$ zu erhalten, ist gegenüber Theorem 4.2.2 nur noch $a(\phi_-(t))\psi_g$ wie in Lemma 2.2.6 abzuschätzen und der Limes $t \rightarrow \infty$ zu nehmen. (Das Potential $V(\mathbf{x}) = m\omega_0^2\mathbf{x}^2/2$ erfüllt nicht die Voraussetzungen von Kapitel 2, der Beweis der Lemmata 2.2.5 und 2.2.6 gilt aber auch für dieses Potential.) \square

Die Ergebnisse zu den Überlebenswahrscheinlichkeiten legen nahe, dass die Potenzgesetz-Abweichung von höherer Ordnung in der Kopplungskonstante α sein sollte. Betrachten wir die Funktion ϕ_- , so fällt auf, dass \hat{h} einen Pol bei $\bar{z}_0 = -i\omega_0 + \mathcal{O}(\alpha)$ besitzt, dem wir uns mit $\hat{h}(-i|\mathbf{k}|)$ bis auf einen nichtverschwindenden Abstand der Ordnung α annähern (siehe Unterkapitel 4.1.1). Dabei wird aber der Faktor $(|\mathbf{k}| - \omega_0)$ klein – im Gegensatz zum Faktor $(|\mathbf{k}| + \omega_0)$ in ϕ_+ . (Nach dieser Überlegung erwarten wir auch, dass ϕ_+ bei $|\mathbf{k}| = \omega_0 + \mathcal{O}(\alpha)$ einen Peak aufweist, in diesem Sinne also die Energie des Photons der Differenz der „Energieniveaus“ entspricht.) Nach dieser heuristischen Überlegung zeigen wir im folgenden Korollar, dass $\|a(\phi_-(t))\psi_g\|$ tatsächlich von Ordnung α ist.

Korollar 4.2.4 (Exponentielle Relaxation). *Sei H der Hamilton-Operator (4.1) und ρ erfülle (4.2) mit $\Lambda > (9 + 1/3)\omega_0$. Sei $\alpha_0 > 0$ hinreichend klein und $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Dann existiert eine Konstante $C_1 = C_1(\alpha)$ sowie eine α -unabhängige Konstante C_2 , sodass für $t > 0$ folgende Abschätzung gilt:*

$$\|e^{-iHt}\alpha^*\psi_g - a^*(\phi_+(t))e^{-iEt}\psi_g\| \leq C_1e^{-\gamma t} + \alpha C_2.$$

Es existieren $c_1, c_2 > 0$, sodass $c_1\alpha \leq \gamma \leq c_2\alpha$.

Bemerkung: Wir schließen nicht aus, dass $C_1 = C_1(\alpha) \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow 0$; wir lesen nur $C_1(\alpha) \leq a^{-1/2}C$ ab (wenn wir im Nenner der klassischen Lösungen die Abschätzung $|z_0 - i|\mathbf{k}|| \geq C\alpha$ verwenden).

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass $\|a(\phi_-(t))\psi_g\|$ von Ordnung α ist.

Analog zum Beweis von Lemma 20 in [FGS08] zeigen wir, dass für $\mathbf{k} \neq 0$

$$\|a(\mathbf{k}, \lambda)\psi_g\| \leq \alpha^{1/2} C \frac{|\hat{\rho}(\mathbf{k})|}{\sqrt{|\mathbf{k}|}} \|\mathbf{x}\psi_g\|.$$

(In diesem Beweis bezeichne C immer α -unabhängige Konstanten.) Der Beweis von Theorem 1 in [Gri04] liefert sogar eine α -unabhängige Abschätzung $\|e^{\beta|\mathbf{x}}\psi_g\| \leq C < \infty$ und damit $\|\mathbf{x}\psi_g\| \leq C$. Nun setzen wir ϕ_- aus (4.47) in den Vernichter $a(\phi_-(t)) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \overline{\phi_-(\mathbf{k}, \lambda, t)} a(\mathbf{k}, \lambda) d^3\mathbf{k}$ ein und finden mit $|\hat{\rho}(\mathbf{k})|^2 \leq C_n(1 + |\mathbf{k}|)^n$:

$$\|a(\phi_-(t))\psi_g\| \leq \alpha C \int_0^\infty \frac{k}{(1+k)^n} |\hat{h}_\alpha(-ik)(k - \omega_0)| dk. \quad (4.49)$$

Hier kam ein Faktor $\alpha^{1/2}$ aus ϕ_- hinzu. Wir haben durch die Notation hervorgehoben, dass $\hat{h}_\alpha = \hat{h}$ von α abhängt. Wir zeigen im folgenden eine α -unabhängige Abschätzung für den Integranden von (4.49). Wir unterscheiden dazu die drei Bereiche k von Null bis nahe ω_0 , $k \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$ und k von nahe ω_0 bis $+\infty$.

1. Abschätzung für $k \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$ (mit einem zu konstruierenden α -unabhängigen $\varepsilon > 0$). Es ist $(\alpha, z) \mapsto \hat{h}_\alpha(z)^{-1}$ eine analytische Funktion in zwei Variablen, mit einer einfachen Nullstelle bei $\alpha = 0$, $z = -i\omega_0$. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungsatz (vgl. [BM48, Seite 188], [FL10, Thm. IV.6.4]) existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}^2$ von $(0, -i\omega_0)$ sowie eine in U analytische und nullstellenfreie Funktion $g_\alpha(z)^{-1}$, sodass

$$\hat{h}_\alpha(z)^{-1} = (z - \bar{z}_0(\alpha))g_\alpha(z)^{-1}. \quad (4.50)$$

(Für $\bar{z}_0(\alpha)$ wurde in Theorem 4.1.9 die Bezeichnung $\bar{z}_0 = \bar{z}(\alpha)$ verwendet.)

Wir wählen $\tilde{\alpha} > 0$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B := \overline{B_{\tilde{\alpha}}(0)} \times \overline{B_\varepsilon(-i\omega_0)} \subset U$. Da B kompakt ist, hat darauf $|g_\alpha(z)^{-1}|$ ein (wegen der Nullstellenfreiheit positives) Minimum:

$$|g_\alpha(z)^{-1}| \geq C_{\tilde{\alpha}, \varepsilon} > 0 \quad \forall (\alpha, z) \in B.$$

Wir definieren $p(\alpha)$ indem wir für die Nullstelle schreiben $\bar{z}_0(\alpha) = -i\omega_0 + ip(\alpha)$. Wir haben dann mit (4.50) eingesetzt folgende Abschätzung (dieser Schritt funktioniert für ϕ_+ nicht):

$$\begin{aligned} |\hat{h}_\alpha(-ik)(k - \omega_0)| &= \left| \frac{1}{-ik + i\omega_0 - ip(\alpha)} g_\alpha(-ik)(k - \omega_0) \right| \\ &\leq C_{\tilde{\alpha}, \varepsilon}^{-1} \left| 1 - \frac{p(\alpha)}{k - \omega_0 + p(\alpha)} \right| \leq C_{\tilde{\alpha}, \varepsilon}^{-1} \left(1 + \frac{|p(\alpha)|}{|k - \omega_0 + p(\alpha)|} \right). \end{aligned}$$

Gemäß Theorem 4.1.9 ist für hinreichend kleines α_0 und $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$|p(\alpha)| \leq C_1\alpha \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} p(\alpha)| \geq C_1\alpha,$$

mit α -unabhängigen positiven Konstanten C_1 und C_2 . Daher $|k - \omega_0 + p(\alpha)| \geq |\operatorname{Im} p(\alpha)| \geq C_1\alpha$. Es folgt, dass für $(\alpha, -ik) \in B$

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)(k - \omega_0)| \leq C_{\tilde{\alpha}, \varepsilon}^{-1} \left(1 + \frac{C_2\alpha}{C_1\alpha} \right) = C, \quad \text{unabhängig von } \alpha. \quad (4.51)$$

2. Abschätzung für k von nahe ω_0 bis $+\infty$. Aus dem Beweis von Lemma 4.1.5 haben wir

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)^{-1}| \geq |-ik|^2(m - |f_\alpha(-ik)|) - m\omega_0^2$$

und $|f_\alpha(-ik)| \leq \alpha C(\rho)/k$. Es folgt

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)^{-1}| \geq k^2(m - \frac{\alpha}{k}C(\rho)) - m\omega_0^2 = m(k^2 - \omega_0^2) - \frac{\alpha C(\rho)}{\omega_0}.$$

Sei $\delta > 0$. Wir schränken uns ein auf k mit

$$k \geq \sqrt{(\omega_0^2 + \delta^2) + \alpha \frac{C(\rho)}{m\omega_0}} =: k_{0,+}.$$

Dies impliziert

$$m(k^2 - \omega_0^2) - \frac{\alpha C(\rho)}{\omega_0} \geq m\delta^2.$$

Wir wählen $\delta < \varepsilon$ (mit ε aus der Abschätzung für $k \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$). Für hinreichend kleines α_0 ist dann $k_{0,+} \in (\omega_0, \omega_0 + \varepsilon]$ und wir haben für alle $k \geq k_{0,+}$ die Abschätzung

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)| \leq 1/(m\delta^2). \quad (4.52)$$

3. Abschätzung für k von Null bis nahe ω_0 . Wir schätzen elementar ab:

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)^{-1}| \geq m(\omega_0^2 - k^2) - k^2 \frac{2}{3} \alpha D(\rho). \quad (4.53)$$

Sei $\delta > 0$ so klein, dass $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0)$ (mit ε aus der Abschätzung für $k \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon]$). Mittels (4.53) sehen wir, dass

$$|\hat{h}_\alpha(-ik)^{-1}| \geq m\delta^2 \quad (4.54)$$

solange $k \leq (1 + \frac{2\alpha D(\rho)}{3m})^{-1/2} \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} =: k_{0,-}$. Für hinreichend kleines α_0 ist $k_{0,-} \in [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0)$.

Nach Konstruktion überlappen die Gültigkeitsbereiche der Abschätzungen (4.52), (4.51) und (4.54), sodass wir den Integranden von (4.49) durch eine α -unabhängige integrierbare Funktion nach oben abschätzen können. \square

Es liegt nahe zu vermuten, dass sich wie im Falle der Überlebenswahrscheinlichkeiten der Potenzgesetz-Fehler zu höheren Ordnungen in α verschieben lässt, wenn wir als Ausgangszustand nicht $\alpha^* \psi_g$ verwenden, sondern die Resonanz durch eine Störungsentwicklung höherer Ordnung besser approximieren. Wir gehen hier aber nicht weiter auf diese Frage ein.

Nach Theorem 4.2.2 können wir auch eine Vorhersage über das Verhalten eines angeregten Zustandes $(\alpha^*)^n \psi_g$ treffen. Formal haben wir

$$e^{-iHt}(\alpha^*)^n \psi_g = (e^{-iHt} \alpha^* e^{iHt})^n \psi_g e^{-iEt} = (b(t) + a^*(\phi_+(t)) + a(\phi_-(t)))^n \psi_g e^{-iEt}.$$

Dies ist eine endliche Linearkombination von Zuständen mit maximal n für $t \rightarrow \infty$ freien Photonen.

Interessant wäre auch zu untersuchen, welcher Raum durch Anwendung von Aufsteigeoperatoren α^* (bezüglich aller drei Raumrichtungen) auf den Grundzustand ψ_g aufgespannt wird. Für $\alpha = 0$ ist der Grundzustand $\psi_g = \psi_{\text{el}} \otimes \Omega$, und durch Anwendung von Aufsteigeoperatoren wird $\mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \Omega$ aufgespannt, da die Hermite-Funktionen eine Basis des $L^2(\mathbb{R})$ sind. Darüber hinaus ist zu vermuten, dass sich auch für Anfangszustände mit zusätzlichen Photonen mit unserer Methode die Zeitentwicklung berechnen lässt, hätten wir uns nicht bei der klassischen Lösung auf die Anfangsbedingung verschwindender Felder zurückgezogen.

In Unterkapitel 3.2.2 haben wir die Vermutung aufgestellt, dass für die Photonenemission durch Atome im Wesentlichen einlaufende Photonenzustände relevant sind. Die Berechnung der Mellin-Transformierten von ϕ_+ wäre eine Möglichkeit am Spezialfall diese Vermutung nicht-störungstheoretisch zu überprüfen.

Ebenfalls interessant wäre der Vergleich unseres Ergebnisses für die Relaxationsrate mit einer (formalen) störungstheoretischen Berechnung der Übergangrate wie Fermis Goldener Regel.

Schließlich wäre interessant zu untersuchen ob sich unter Verwendung von Korollar 4.2.4 bessere Abschätzungen (im Vergleich zum Potenzgesetz aus Theorem 2.2.12) für $|\langle \psi_t, A\psi_t \rangle - \langle \psi_g, A\psi_g \rangle \langle \psi, \psi \rangle|$ erzielen lassen. Das Problem hierbei ist, dass im Beweis von Theorem 2.2.12 ein Potenzgesetz nicht nur durch die Konvergenz gegen asymptotische Erzeuger eingeht, sondern auch weitere Terme mittels der Methode der stationären Phase abgeschätzt wurden. Diese Abschätzungen wären entweder durch exponentielle Abschätzungen zu ersetzen oder es wäre zu zeigen, dass diese Terme von ausreichend hoher Ordnung in α sind. Dazu könnte hier gegenüber Kapitel 2 die explizite Form des Photonenzustands ϕ_+ verwendet werden. U.U. wäre es auch hilfreich die Menge der Observablen A zu verkleinern.

5. Störungsentwicklung von Rayleigh-Streuamplituden

Als Rayleigh-Streuung bezeichnet man die Streuung von Photonen an einem Atom, solange die Gesamtenergie unterhalb der Ionisierungsschwelle bleibt. Wir zeigen in diesem Kapitel, wie sich rigoros eine Entwicklung von Streuamplituden $\langle a_+^*(f)\psi_\alpha, a_-^*(h)\psi_\alpha \rangle$ nach der Feinstrukturkonstante α bis zu beliebiger Ordnung vornehmen lässt (als asymptotische Reihe mit α -abhängigen Koeffizienten, in welchen statt $e^{-iH_\alpha t}$ Propagator und Resolvente für $\alpha = 0$ sowie der Wechselwirkungsoperator auftauchen). Dazu wird der Propagator $e^{-iH_\alpha t}$ mit der Duhamel-Formel entwickelt; durch das Potenzgesetz in t als Abschätzung für die Konvergenz gegen die asymptotischen Erzeuger ist der Fehler kontrollierbar. Außerdem müssen Grundzustand und Grundzustandsenergie in α entwickelt werden; wir übernehmen dazu die Entwicklungen von [BFP06] [BFP07b].

In führender Ordnung von α haben wir eine Entwicklung von Amplituden für die Emission genau eines Photons aus einer Resonanz (d. h. $\langle a_+^*(h)\psi_\alpha, \psi_i \otimes \Omega \rangle$ mit einem Eigenzustand ψ_i von $H_{el} = -\Delta + V$) in Unterkapitel 3.2.1 durchgeführt. Das im Folgenden demonstrierte Verfahren lässt sich auch für Emissionsamplituden anwenden und zeigt wie eine Entwicklung mit beliebig vielen Photonen bis zu beliebiger Ordnung systematisch durchführbar ist. Obwohl für uns vor allem die Emissionsamplituden von Interesse sind, zeigen wir das Verfahren an den verbreiteteren Streuamplituden um direkt mit der Literatur vergleichen zu können.

Bach et al. [BFP07a] haben eine Entwicklung für Rayleigh-Streuamplituden konstruiert, die dieses Kapitel motiviert hat. Der wesentliche Punkt unserer Arbeit ist, dass wir durch Verzicht auf eine Reduktionsformel das Vorgehen demgegenüber deutlich vereinfachen können und die Entwicklungskoeffizienten explizit angeben.

Sei der Hamilton-Operator $H_\alpha = (\mathbf{p} + \alpha^{3/2} \mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}))^2 + V + H_f$ gemäß (1.1).

Voraussetzungen. *Das Potential V sei infinitesimal beschränkt bzgl. $-\Delta$; außerdem sei $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = 0$. Es sei $\inf \sigma(-\Delta + V)$ ein negativer isolierter Eigenwert von $H_{el} = -\Delta + V$ mit Vielfachheit 1.*

Es sei außerdem $\kappa \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\kappa \geq 0$.

Diese Voraussetzungen werden z. B. vom Coulomb-Potential einer endlichen Zahl statischer Kerne erfüllt.

Es folgt die Existenz eines Grundzustandes ψ_α mit Energie E_α [GLL01]; für hinreichend kleines α ist ψ_α (bis auf eine Phase) eindeutig. Weiter ist ψ_α exponentiell lokalisiert [Gri04].

Nach [GZ09a] existieren die Zustände $a_\pm^*(f)\psi_\alpha$; die Bedingung (III.2) aus [BFP07a] benötigen wir dazu nicht. Auch das Ausschließen der Vorwärtsstreuung, $\langle f_i, h_j \rangle = 0 \forall i, j$,

ist bei uns unnötig.

5.1. Duhamel-Entwicklung des Propagators

In diesem Unterkapitel wollen wir die Duhamel-Entwicklung des Propagators $e^{-iH_\alpha t}$ nach Propagatoren $e^{-iH_0 t}$ und dem Wechselwirkungsoperator $W_\alpha := H_\alpha - H_0$, $D(W_\alpha) = D(H_\alpha) = D(H_0)$ zeigen. Wir fügen dabei Resolventen $R_\alpha := (H_\alpha + i)^{-1}$ an, damit in der Entwicklung nur beschränkte Operatoren $W_\alpha R_\alpha$ statt unbeschränkter Operatoren W_α auftreten.

Mit $R_0 := (H_0 + i)^{-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Entwicklung

$$R_\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} R_0 (-W_\alpha R_0)^j + R_\alpha (-W_\alpha R_0)^n. \quad (5.1)$$

Es ist $\|W_\alpha R_0\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$ für $\alpha \rightarrow 0$ (siehe den Beweis von Proposition A.3 in [GZ09b]).

Satz 5.1.1 (Duhamel-Entwicklung). *Es existiert $\alpha_0 > 0$, sodass für $\alpha \in (0, \alpha_0)$ gilt: Die Operatoren $W_R(t) := e^{-iH_0 t} (-iW_\alpha R_\alpha) e^{iH_0 t}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt mit $\|W_R(t)\| = \|W_R(0)\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$ für $\alpha \rightarrow 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\begin{aligned} e^{-iH_\alpha t} R_\alpha^n &= e^{-iH_0 t} R_\alpha^n \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^t dt_k W_R(t_1) W_R(t_2) \dots W_R(t_k) e^{-iH_0 t} R_\alpha^{n-k} \\ &+ \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^t dt_n W_R(t_1) W_R(t_2) \dots W_R(t_n) e^{-iH_\alpha t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Beweis. Sei $\psi \in \mathcal{H}$, dann ist $R_\alpha^n \psi \in D(H_\alpha) = D(H_0)$. Also ist $e^{-iH_0 s} e^{-iH_\alpha(t-s)} R_\alpha^n \psi$ bezüglich s differenzierbar. Es gilt also auf jedes $\psi \in \mathcal{H}$ angewandt:

$$\begin{aligned} (e^{-iH_0 t} - e^{-iH_\alpha t}) R_\alpha^n &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{-iH_0 s} e^{-iH_\alpha(t-s)} \right) R_\alpha^n ds \\ &= \int_0^t e^{-iH_0 s} i(H_\alpha - H_0) R_\alpha e^{-iH_\alpha(t-s)} R_\alpha^{n-1} ds. \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung als

$$e^{-iH_\alpha t} R_\alpha^n = e^{-iH_0 t} R_\alpha^n + \int_0^t ds e^{-iH_0 s} (-iW_\alpha R_\alpha) e^{-iH_\alpha(t-s)} R_\alpha^{n-1}$$

und setzen die Gleichung iterativ in sich selbst ein.

Zur Abschätzung der Operatornorm: Wir setzen (5.1) in $-W_\alpha R_\alpha$ ein und wählen α_0 so, dass $\|W_\alpha R_0\| < 1$ für alle $\alpha < \alpha_0$. Wir nehmen den Limes $n \rightarrow \infty$ (nach dem Graphensatz ist $W_\alpha R_\alpha$ beschränkt, im Limes verschwindet also der Restterm, $-W_\alpha R_\alpha (-W_\alpha R_0)^n \rightarrow 0$) und erhalten $-W_\alpha R_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} (-W_\alpha R_0)^j$. Da $\|W_\alpha R_0\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$ können wir daran ablesen, dass $\|W_\alpha R_\alpha\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$. \square

5.2. Entwicklung der Streuamplituden

Wir zitieren die Entwicklung von Grundzustand und Grundzustandsenergie nach der Feinstrukturkonstante α aus der Arbeit von Bach et al.

Satz 5.2.1 (Grundzustandsentwicklung [BFP06] [BFP07b]).

- Sei $N \in \mathbb{N}$ und $N \geq 3$.

Dann existiert $\alpha_0 > 0$, sodass für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ die Grundzustandsenergie E_α und der Grundzustand ψ_α Entwicklungen folgender Form haben:

$$E_\alpha = \sum_{l=0}^N \varepsilon_l(\alpha) \alpha^l + o(\alpha^N) \quad (5.3)$$

$$\psi_\alpha = \sum_{l=0}^{2N} \phi_l(\alpha) \alpha^{l/2} + o(\alpha^N), \quad (5.4)$$

mit Koeffizienten $\varepsilon_l(\alpha) \in \mathbb{R}$, $\phi_l(\alpha) \in \mathcal{H}$ welche für alle $l \geq 3$ und für alle $\delta > 0$ erfüllen:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^\delta |\varepsilon_l(\alpha)| = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^\delta \|\phi_l(\alpha)\| = 0. \quad (5.5)$$

Außerdem ist $\varepsilon_0(\alpha) = E_0$ und $\phi_0(\alpha) = \psi_0$, sowie $\phi_l(\alpha) = 0$ und $\varepsilon_l(\alpha) = 0$ für $l = 1, 2$. Jeder Koeffizient $\varepsilon_l(\alpha)$, $\phi_l(\alpha)$ lässt sich durch endlich viele (konvergente) Integrale berechnen.

- Für alle $N \in \mathbb{N}$ existiert $\alpha_0 > 0$, sodass für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $M \in \mathbb{N}$ eine Entwicklung der folgenden Form existiert (mit berechenbaren Koeffizienten):

$$(E_\alpha + i)^M = \sum_{l=0}^N \varepsilon_{M,l}(\alpha) \alpha^l + \mathcal{O}(\alpha^N),$$

mit $\alpha^\delta |\varepsilon_{M,l}(\alpha)| \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$) für alle $\delta > 0$ und alle l .

Beweis. Die Entwicklungen von E_α und ψ_α sind unter Umbenennung der Koeffizienten aus [BFP06] [BFP07b] übernommen.

Für die Entwicklung von $(E_\alpha + i)^M$ setzen wir diese Entwicklungen ein und multiplizieren aus. \square

Gleichung (5.5) steht in Zusammenhang mit dem möglichen Auftreten von sogenannten Infrarot-Logarithmen $\log(1/\alpha)$. So sind auch E_α und ψ_α bei $\alpha = 0$ nicht analytisch, eine einfache Taylor-Entwicklung ist nicht möglich.

Wir könnten auch Entwicklungen wie in [HH10] verwenden. Für diese muss das Potential rotationssymmetrisch sein, dafür sind konvergente Reihen mit bzgl. α beschränkten Koeffizienten möglich.

Weiter zitieren wir die Abschätzung der Konvergenz gegen die asymptotischen Erzeuger aus [GZ09b, Prop. 3.5]. (Unter Verzicht auf die Kontrolle der α -Abhängigkeit

haben wir dieses Ergebnis bereits in Lemma 2.2.8 zitiert.) Hier ist wichtig, dass κ eine C^∞ -Funktion ist, da der Beweis die Methode der stationären Phase verwendet.

Wir schreiben $a_t^*(\underline{h}_t) = e^{iH_\alpha t} a^*(\underline{h}_t) e^{-iH_\alpha t}$.

Satz 5.2.2 (Konvergenzgeschwindigkeit [GZ09b, Prop. 3.5]). *Sei $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m) \in (L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^m$ und $\varepsilon h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $j = 1, \dots, m$. Sei $n \in \mathbb{N}$.*

Dann existiert ein $\alpha_0 > 0$ und eine Konstante $C = C(n, \underline{h})$, sodass für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $t > 0$ gilt:

$$\|a_+^*(\underline{h})\psi_\alpha - a_t^*(\underline{h}_t)\psi_\alpha\| \leq a^{3/2} \frac{C}{1 + |t|^n}.$$

Dies gilt genauso für $t < 0$, falls $a_-^(\underline{h})$ verwendet wird.*

Wir führen nun die Entwicklung von Streuamplituden $\langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, a_-^*(\underline{h})\psi_\alpha \rangle$ nach α durch. Der Trick ist, dass die asymptotischen Erzeuger durch $a_t^*(\underline{h}_t)$ mit $t = \pm\alpha^{-\varepsilon}$ ersetzt werden können, wobei nur ein Fehler beliebig hoher Ordnung von α entsteht. Dadurch sind die Integrationsgrenzen in der Duhamel-Entwicklung durch $\alpha^{-\varepsilon}$ beschränkt und der Fehlerterm (5.2) der Duhamel-Entwicklung ist somit abschätzbar.

Theorem 5.2.3 (Entwicklung von Rayleigh-Streuamplituden). *Seien die Voraussetzungen an V und κ vom Kapitelanfang erfüllt und sei H_α gemäß (1.1) definiert.*

Sei $\underline{h} = (h_1, \dots, h_{m_h}) \in (L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^{m_h}$ und $\varepsilon h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $j = 1, \dots, m_h$, sei weiter $\underline{f} = (f_1, \dots, f_{m_f}) \in (L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))^{m_f}$ und $\varepsilon f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $j = 1, \dots, m_f$.

Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Entwicklung

$$e^{-iE_\alpha 2\alpha^{-1/2}} \langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, a_-^*(\underline{h})\psi_\alpha \rangle = \sum_{l=0}^{n+1} S_l(\alpha) \alpha^l + o(\alpha^n) \quad (\alpha \rightarrow 0 \text{ und } \alpha \neq 0), \quad (5.6)$$

sodass für alle $l \geq 1$ und alle $\delta > 0$ für die Koeffizienten gilt

$$\alpha^\delta |S_l(\alpha)| \rightarrow 0 \quad (\alpha \rightarrow 0). \quad (5.7)$$

Um die Koeffizienten explizit anzugeben, definieren wir $W_{R_0}(t) := e^{-iH_0 t} (-W_\alpha R_0) e^{iH_0 t}$ und $W_{R_0} := W_{R_0}(0)$; dann ist

$$\begin{aligned} S_l(\alpha) &= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \varepsilon(p, l, \alpha) \sum_{l_1=1}^{m_h} \cdots \sum_{l_p=1}^{m_h} \sum_{k=0}^n i^k \sum_{j_1=1}^{n+1} \cdots \sum_{j_k=1}^{n+1} \sum_{r_1=0}^n \cdots \sum_{r_{n+1+m_f+m_h-k}=0}^n \times \\ &\times \sum_{m_A=0}^{2(n+1)} \sum_{m_B=0}^{2(n+1)} \alpha^{(m_A+m_B)/2} \int_0^{2\alpha^{-1/2}} dt_1 \cdots \int_{t_{k-1}}^{2\alpha^{-1/2}} dt_k \times \\ &\times \left\langle \prod_{i=1}^{m_f} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right\rangle a^*(\underline{f}_{-\alpha^{-1/2}}) \phi_{m_A}(\alpha), \left(\prod_{i=1}^k W_{R_0}(t_i)^{j_i} \right) e^{-iH_0 2\alpha^{-1/2}} \times \\ &\times \left(\prod_{i=m_f+1}^{n+1+m_f+m_h-k} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right) a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p}) \phi_{m_B}(\alpha). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die $\phi_m(\alpha)$ und die $\varepsilon(p, l, \alpha) := \varepsilon_{n+1+m_f+m_h-p, l}(\alpha)$ sind die Koeffizienten der Entwicklung aus Satz 5.2.1. Es ist $\|W_{R_0}(t)\| = \|W_{R_0}\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$.

Bemerkung: Aus (5.8) lassen sich noch die α -Potenzen vor die Koeffizienten ziehen. Insbesondere können wir $W_\alpha = \alpha^{3/2} 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) + \alpha^3 \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x})^2$ einsetzen und die Potenzen sortieren.

Beweis. (Einige Abschätzungen haben wir in Lemma 5.2.4 gesammelt. Wir verwenden diese im folgenden Beweis kommentarlos zur Abschätzung der Fehlerterme.)

Zuerst fügen wir $N := n + 1 + m_f + m_h$ Resolventen ein:

$$\langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, a_-^*(\underline{h})\psi_\alpha \rangle = \langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, (H_\alpha + i)^{-N} (H_\alpha + i)^N a_-^*(\underline{h})\psi_\alpha \rangle.$$

Wir kommutieren $(H_\alpha + i)^N$ an $a_-^*(\underline{h})$ vorbei (siehe Lemma 5.2.5). Die dabei auftretenden Summen über p und über die $l_i, i = 1, \dots, p$, sowie die \mathbb{C} -Koeffizienten werden aus dem Skalarprodukt gezogen und es verbleibt im Skalarprodukt

$$\langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, R_\alpha^N a_-^*(\underline{h}^{l_1, \dots, l_p})\psi_\alpha \rangle. \quad (5.9)$$

Den Ausdruck (5.9) approximieren wir durch $\langle a_+^*(\underline{f}_t)\psi_\alpha, R_\alpha^N a_-^*(\underline{h}_{-t}^{l_1, \dots, l_p})\psi_\alpha \rangle$, wobei nach Satz 5.2.2 der Fehler durch $\alpha^{3/2} \frac{C(\tilde{n})}{1+|\tilde{n}|}$ mit beliebigem $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Wir wählen $t = \alpha^{-1/2}$ und $\tilde{n} = 2n - 1$, dann wird der Fehler $\mathcal{O}(\alpha^{n+1})$.

Wir haben somit

$$\langle a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha, a_-^*(\underline{h})\psi_\alpha \rangle = \sum_{p=0}^N \binom{N}{p} (E_\alpha + i)^{N-p} \sum_{l_1=1}^{m_h} \dots \sum_{l_p=1}^{m_h} S_{\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p} + \mathcal{O}(\alpha^{n+1}), \quad (5.10)$$

$$\text{mit } S_{\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p} = \left\langle a^*(\underline{f}_{\alpha^{-1/2}}) e^{-iH_\alpha \alpha^{-1/2}} \psi_\alpha, R_\alpha^N e^{-iH_\alpha 2\alpha^{-1/2}} a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p}) e^{iH_\alpha \alpha^{-1/2}} \psi_\alpha \right\rangle.$$

Wir ziehen Resolventen $R_\alpha^{m_f}$ aus dem zweiten ins erste Argument des Skalarprodukts und setzen dann für den Propagator $e^{-iH_\alpha 2\alpha^{-1/2}}$ die Duhamel-Entwicklung aus Satz 5.1.1 ein:

$$\begin{aligned} S_{\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p} &= e^{iE_\alpha 2\alpha^{-1/2}} \left\langle R_\alpha^{m_f} a^*(\underline{f}_{\alpha^{-1/2}}) \psi_\alpha, \sum_{k=0}^n \int_0^{2\alpha^{-1/2}} dt_1 \dots \int_{t_{k-1}}^{2\alpha^{-1/2}} dt_k W_R(t_1) \dots W_R(t_k) \right. \\ &\quad \left. \times e^{-iH_0 2\alpha^{-1/2}} R_\alpha^{n+1-k+m_h} a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p}) \psi_\alpha \right\rangle + \mathcal{O}(\alpha^{n+1}) \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt entwickeln wir die Resolventen R_α gemäß (5.1) (auch jene in den $W_R(t_j)$), wobei wir die Summanden, welche einen Fehlerterm $R_\alpha(-W_\alpha R_0)^{n+1}$ enthalten

in $\mathcal{O}(\alpha^{n+1})$ absorbieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
S_{\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p} &= e^{iE_\alpha 2\alpha^{-1/2}} \sum_{k=0}^n i^k \sum_{r_1=0}^n \dots \sum_{r_{n+1-k+m_f+m_h}=0}^n \sum_{j_1=1}^{n+1} \dots \sum_{j_k=1}^{n+1} \int_0^{2\alpha^{-1/2}} dt_1 \dots \int_{t_{k-1}}^{2\alpha^{-1/2}} dt_k \times \\
&\times \left\langle \left(\prod_{i=1}^{m_f} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right) a^*(\underline{f}_{\alpha^{-1/2}}) \psi_\alpha, \left(\prod_{i=1}^k W_{R_0}(t_i)^{j_i} \right) e^{-iH_0 2\alpha^{-1/2}} \times \right. \\
&\times \left. \left(\prod_{i=m_f+1}^{n+1-k+m_f+m_h} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right) a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p}) \psi_\alpha \right\rangle + \mathcal{O}(\alpha^{n+1}). \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Als nächstes führen wir die Entwicklung des Grundzustandes in den Matrixelementen (5.11) und der Grundzustandsenergie in (5.10) durch.

Vor dem Grundzustand im zweiten Argument des Skalarprodukts steht der Operator $\left(\prod_{i=m_f+1}^{m_f+m_h} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right) a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p})$ und analog mit \underline{f} im ersten Argument des Skalarprodukts. Dies sind nach (5.14) beschränkte Operatoren, wir können also die Entwicklung des Grundzustandes aus Satz 5.2.1 ohne Diskussion von Definitionsbereichen einsetzen. (Wir verwenden $o(\alpha^{n+1}) \subset \mathcal{O}(\alpha^{n+1})$.)

Wir entwickeln $(E_\alpha + i)^{n+1+m_f+m_h-p}$ wie in Satz 5.2.1. Dies liefert die Summe aus (5.6). Wegen $\mathcal{O}(\alpha^{n+1}) \subset o(\alpha^n)$ ist damit die Entwicklungsformel gezeigt.

Zum Beweis von (5.7) verwenden wir, dass $\left(\prod_{i=m_f+1}^{m_f+m_h} R_0 W_{R_0}^{r_i} \right) a^*(\underline{h}_{-\alpha^{-1/2}}^{l_1, \dots, l_p})$ (und der analoge Operator mit \underline{f}) gemäß (5.14) beschränkt sind, und $\alpha^\delta |\varepsilon_{n+1+m_f+m_h-p, l}(\alpha)| \rightarrow 0$ und $\|\phi_m(\alpha)\| \alpha^{m/2} \leq C$ mit α -unabhängigem $C = C_m$ (für alle $m \geq 0$). \square

Mit (5.6) und (5.7) haben wir eine Entwicklung analog der von [BFP07a] konstruiert, unsere Konstruktion ist jedoch deutlich einfacher, da wir ohne Reduktionsformel auskommen. In physikalischen Größen wie z. B. Wirkungsquerschnitten fällt die konstante Phase $e^{-iE_2 \alpha^{-1/2}}$ typischerweise weg, da nur das Betragsquadrat der Amplitude eingeht.

Wir merken zu Theorem 5.2.3 an, dass viele der Summanden in (5.8) in $\mathcal{O}(\alpha^{n+1})$ schon weggelassen werden können. Man sieht durch Zählen der α -Potenzen (beachte $\|W_{R_0}(t)\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$) leicht, dass die oberen Schranken der Summen wie folgt verkleinert werden können: Sei $N_k = 2(n+1-l) - 3k$ und M_k die größte ganze Zahl kleiner-gleich $N_k/3$, dann genügt es in $S_l(\alpha)$ zu summieren über

$$\sum_{p=0}^{n+1} \sum_{l_1=1}^2 \dots \sum_{l_p=1}^2 \sum_{k=0}^n \sum_{j_1=1}^{M_0} \dots \sum_{j_k=1}^{M_0} \sum_{r_1=0}^{M_k} \dots \sum_{r_{n+1+m_f+m_h-k}=1}^{M_k} \sum_{m_A=0}^{N_k} \sum_{m_B=0}^{N_k},$$

und hierin sind auch nur Summanden mit $2l + m_A + m_B + 3(j_1 + \dots + j_k + r_1 + \dots + r_{n+1+m_f+m_h-k}) < 2(n+1)$ mitzunehmen.

Die folgenden Abschätzungen wurden in diesem Kapitel verwendet.

Lemma 5.2.4. *Sei $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$ mit $\varepsilon f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$ für alle $i = 1, \dots, m$.*

- Es existiert ein $\alpha_0 > 0$ und ein $C = C(\underline{f})$, sodass für alle $\alpha \in [0, \alpha_0]$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\|a_+^*(\underline{f})\psi_\alpha\| \leq C, \quad \|a^*(\underline{f}_t)\psi_\alpha\| = \|a_t^*(\underline{f}_t)\psi_\alpha\| \leq C. \quad (5.12)$$

Es ist $\|R_\alpha\| \leq 1$ für alle $\alpha \geq 0$.

- Es ist für jede Abfolge von Erzeugern und Vernichtern für $\alpha \rightarrow 0$

$$\|a^\#(\underline{f}_{\pm\alpha^{-1/2}})R_0W_{R_0}^{j_1} \cdots R_0W_{R_0}^{j_m}\| = \mathcal{O}(\alpha^{\frac{3}{2}(j_1+\cdots+j_m)}) \quad (5.13)$$

und

$$\|R_0W_{R_0}^{j_1} \cdots R_0W_{R_0}^{j_m} a^*(\underline{f})\| = \|a(f_m) \cdots a(f_1)R_0W_{R_0}^{j_m} \cdots R_0W_{R_0}^{j_1}\|. \quad (5.14)$$

Beweis. • Für (5.12) siehe [GZ09b] Lemma A.1 und Lemma A.4. Die Abschätzung der Resolvente ist mit dem Spektralsatz trivial.

- Seien Operatoren A und B gegeben, dann definieren wir $\text{ad}_A^n(B)$ rekursiv durch $\text{ad}_A^0(B) := B$ und $\text{ad}_A^n(B) := [A, \text{ad}_A^{n-1}(B)]$. Zunächst zeigen wir, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ und $j \geq 1$ gilt

$$\text{ad}_{H_f}^l((W_\alpha R_0)^j) = \mathcal{O}(\alpha^{3j/2}). \quad (5.15)$$

Dazu halten wir l fest und führen eine Induktion in j aus, wobei wir Gl. (72) aus [FGS01] verwenden, sowie explizit $W_\alpha = \alpha^{3/2}2\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) + \alpha^3\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x})^2$ und dass wegen $\kappa \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt $\|\omega^k \mathbf{G}_\mathbf{x}\|_\omega < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis von Gleichung (5.13): Sei $\underline{f} = (f_1, \dots, f_m)$. Es ist mit α -unabhängiger Konstante $C = C(\underline{f})$

$$a^\#(\underline{f}_{\pm\alpha^{-1/2}}) \prod_{i=1}^m R_0(W_\alpha R_0)^{j_i} = \underbrace{a^\#(\underline{f}_{\pm\alpha^{-1/2}})(H_f + 1)^{-m}(H_f + 1)^m}_{\text{in Operatornorm} \leq C} \prod_{i=1}^m R_0(W_\alpha R_0)^{j_i}.$$

Wir zeigen $(H_f + 1)^m \prod_{i=1}^m R_0(W_\alpha R_0)^{j_i} = \mathcal{O}(\alpha^{\frac{3}{2}(j_1+\cdots+j_m)})$ durch Induktion in m .

Induktionsanfang: Für $m = 1$ haben wir $(H_f + 1)R_0(W_\alpha R_0)^{j_1}$. Nach dem Graphensatz ist $H_f R_0$ beschränkt. Mit $\|W_\alpha R_0\| = \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$ ist die Aussage bewiesen.

Induktionsschritt auf m : Es ist

$$(H_f + 1)^m \prod_{i=1}^m R_0(W_\alpha R_0)^{j_i} = \underbrace{(H_f + 1)R_0(H_f + 1)^{m-1}}_{\|\cdot\| \leq C} (W_\alpha R_0)^{j_1} \prod_{i=2}^m R_0(W_\alpha R_0)^{j_i}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
& (H_f + 1)^{m-1} (W_\alpha R_0)^{j_1} \prod_{i=2}^m R_0 (W_\alpha R_0)^{j_i} \\
&= \underbrace{(W_\alpha R_0)^{j_1}}_{\mathcal{O}(\alpha^{3j_1/2})} \underbrace{(H_f + 1)^{m-1} \prod_{i=2}^m R_0 (W_\alpha R_0)^{j_i}}_{\text{Induktionsannahme anwenden}} + \underbrace{[(H_f + 1)^{m-1}, (W_\alpha R_0)^{j_1}]}_{\text{[FGS01, Gl. (71)] anwenden}} \prod_{i=2}^m R_0 (W_\alpha R_0)^{j_i} \\
&= \mathcal{O}(\alpha^{\frac{3}{2}(j_1 + \dots + j_m)}) + \sum_{l=1}^{m-1} \underbrace{\text{ad}_{H_f}^l((W_\alpha R_0)^{j_1})}_{\mathcal{O}(\alpha^{3j_1/2}) \text{ nach (5.15)}} \underbrace{(H_f + 1)^{m-1-l} \prod_{i=2}^m R_0 (W_\alpha R_0)^{j_i}}_{\text{Induktionsannahme anwenden}}.
\end{aligned}$$

Gleichung (5.14) folgt jetzt aus der Gleichung $\|B^*\| = \|B\|$ für die Operatornorm. \square

Zum Einfügen der Resolventen im Beweis von Theorem 5.2.3 haben wir das folgende Lemma verwendet.

Lemma 5.2.5. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $\underline{h} = (h_1, \dots, h_m)$ mit $\omega^N h_j \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ für alle $N = 0, \dots, n$ und alle $j = 1, \dots, m$. Wir definieren $\underline{h}^{l_1, \dots, l_p} := (h_1, \dots, \omega h_{l_1}, \dots, h_m)$, d. h. für jedes hochgestellte l_j ist an Stelle l_j in \underline{h} der Operator ω anzuwenden (falls mehrere l_j übereinstimmen, so tritt ω dort in entsprechender Potenz auf).*

Dann ist

$$(H_\alpha + i)^n a_\pm^*(\underline{h}) \psi_\alpha = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (E + i)^{n-p} \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \dots \sum_{l_p=1}^m a_\pm^*(\underline{h}^{l_1, \dots, l_p}) \psi_\alpha.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion in n unter Verwendung des Kommutators $[H_\alpha, a_\pm^*(h_j)] = a_\pm^*(\omega h_j)$ und der Kommutatoridentität (2.4) sowie der Beziehung $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$. \square

6. Zeitabhängige Schranke für die Photonenzahl

In diesem Kapitel zeigen wir ein Ergebnis etwas abseits der Hauptlinie der Arbeit. Da wir keine Störungsentwicklung vorhaben, verwenden wir $H = (\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V + H_f$ gemäß Gl. (1.1) mit $\alpha = 1$.

Wir wollen im folgenden eine Abschätzung für die Anzahl der Photonen geben, die in einem gebundenen Zustand im Laufe der Zeit entstehen können. (Als gebundenen Zustand verstehen wir einen Zustand der energetisch unterhalb der Ionisierungsschwelle Σ liegt.)

Voraussetzungen. Sei V infinitesimal beschränkt bzgl. $-\Delta$ und sei $V \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

Mit diesen Voraussetzungen können wir die exponentielle räumliche Lokalisierung gebundener Zustände [Gri04] benutzen, um \mathbf{x} -abhängige Terme aus dem Pauli-Fierz-transformierten Hamilton-Operator zu kontrollieren. Die Voraussetzungen lassen insbesondere das Coulomb-Potential zu.

Der Beweis würde auch analog ohne Pauli-Fierz-Transformation funktionieren (und dann weniger Aufwand erfordern), würde dann aber nur $t^{2/3}$ statt $t^{2/5}$ in Abschätzung (6.1) liefern.

Wir verwenden die Notation $\langle \mathbf{x} \rangle = \sqrt{1 + \mathbf{x}^2}$. Einige Abschätzungen haben wir nach Lemma 6.2 und Lemma 6.3 ausgelagert.

Theorem 6.1. Sei $H = (\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V + H_f$. Das Potential V erfülle oben genannte Voraussetzungen. Sei Σ die Ionisierungsschwelle und $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + \beta^2 < \Sigma$. Sei $\psi \in \chi(H < \lambda)\mathcal{H}$ und $\psi \in D(N)$. Sei $\psi_t := e^{-iHt}\psi$ und es gelte für den UV-Cutoff $\text{ess sup } \kappa < \infty$.

Dann existiert ein $C > 0$, sodass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\langle \psi_t, N\psi_t \rangle \leq C(1 + t^{2/5}). \quad (6.1)$$

Beweis. Wir teilen den Anzahloperator zeitabhängig nach hochenergetischen und niederenergetischen Photonen auf. Sei dazu $\chi_0 : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ eine glatte Funktion, die auf $[0, 1]$ identisch 1 ist, auf $[2, \infty)$ identisch 0 und dazwischen monoton fallend. Sei $\chi_\infty := 1 - \chi_0$. Setze $\chi_{0,t}(\mathbf{k}) := \chi_0(|\mathbf{k}t^\delta|)$ und $\chi_{\infty,t}(\mathbf{k}) := \chi_\infty(|\mathbf{k}t^\delta|)$, wobei $\delta \in (0, 2/3)$ am Beweisende optimal gewählt wird.

Wir teilen auf $N = d\Gamma(1) = d\Gamma(\chi_{0,t}) + d\Gamma(\chi_{\infty,t})$.

Abschätzung des hochenergetischen Anteils:

Da $\chi_{\infty,t}(\mathbf{k}) \leq |\mathbf{k}|t^\delta \chi_{\infty,t}(\mathbf{k})$ gilt nach Lemma 6.2

$$\langle \psi_t, d\Gamma(\chi_{\infty,t})\psi_t \rangle \leq t^\delta \langle \psi_t, d\Gamma(\omega)\psi_t \rangle = t^\delta \langle \psi_t, H_f\psi_t \rangle.$$

Weil $H_f(H+i)^{-1}$ nach dem Graphensatz beschränkt ist erhalten wir eine zeitunabhängige Abschätzung für $\langle \psi_t, H_f \psi_t \rangle$. Somit

$$\langle \psi_t, d\Gamma(\chi_{\infty,t})\psi_t \rangle \leq Ct^\delta. \quad (6.2)$$

Abschätzung des niederenergetischen Anteils:

Die Idee besteht darin, den Erwartungswert als Integral über die Ableitung zu schreiben und diese abzuschätzen. Durch die Pauli-Fierz-Transformation $U := e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0})}$ wird die Abschätzung verbessert.

Offenbar gilt $\langle \psi_t, d\Gamma(\chi_{0,t})\psi_t \rangle = \langle \psi'_t, U d\Gamma(\chi_{0,t}) U^* \psi'_t \rangle$ für $\psi'_t := U\psi_t$. Wir berechnen $U d\Gamma(\chi_{0,t}) U^*$ durch Entwicklung nach Kommutatoren:

$$\begin{aligned} U d\Gamma(\chi_{0,t}) U^* &= d\Gamma(\chi_{0,t}) + [i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}), d\Gamma(\chi_{0,t})] + \frac{1}{2}[i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}), [i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}), d\Gamma(\chi_{0,t})]] \\ &= d\Gamma(\chi_{0,t}) - \sqrt{2}\phi(i\chi_{0,t}\mathbf{G}_0) \cdot \mathbf{x} + \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3, dk)}^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

(Der letzte Summand ist dabei als Multiplikationsoperator bzgl. \mathbf{x} aufzufassen; insbesondere vertauscht er mit $i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0})$, weshalb die Kommutatorentwicklung nach diesem Summand abbricht. Bei der Berechnung des Doppelkommutators wurde verwendet $[\phi(\mathbf{G}_{0,j}), \phi(i\chi_{0,t}\mathbf{G}_{0,l})] = i \operatorname{Im} \langle \mathbf{G}_{0,j}, i\chi_{0,t}\mathbf{G}_{0,l} \rangle = i \langle \sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{G}_{0,j}, \sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{G}_{0,l} \rangle$, für $j, l = 1, 2, 3$.) Wir erhalten damit

$$0 \leq \langle \psi_t, d\Gamma(\chi_{0,t})\psi_t \rangle = \langle \psi'_0, d\Gamma(\chi_{0,0})\psi'_0 \rangle + \int_0^t \frac{d}{ds} \langle \psi'_s, d\Gamma(\chi_{0,s})\psi'_s \rangle ds \quad (6.4)$$

$$+ \sqrt{2} \langle \psi'_t, -\mathbf{x} \cdot \phi(i\chi_{0,t}\mathbf{G}_0)\psi'_t \rangle \quad (6.5)$$

$$+ \langle \psi'_t, \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\|^2 \psi'_t \rangle. \quad (6.6)$$

Es ist $\langle \psi'_0, d\Gamma(\chi_{0,0})\psi'_0 \rangle = \langle \psi_0, U^* d\Gamma(\chi_{0,0}) U \psi_0 \rangle$. Wir rechnen $U^* d\Gamma(\chi_{0,0}) U$ analog zu (6.3) aus. Mit $d\Gamma(\chi_{0,0}) = d\Gamma(1) = N$ und $\psi_0 \in D(N)$ sehen wir dann $\langle \psi'_0, d\Gamma(\chi_{0,0})\psi'_0 \rangle < \infty$.

Wir schätzen im Folgenden die anderen drei Summanden ab.

Abschätzung von (6.6): Es ist

$$\begin{aligned} |\langle \psi'_t, \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\|^2 \psi'_t \rangle| &= \left\| \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\| e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0})} \psi_t \right\|^2 = \left\| \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\| \psi_t \right\|^2 \\ &\leq \left\| \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\| e^{-\beta|\mathbf{x}|} \right\|^2 \|e^{\beta|\mathbf{x}|} \chi(H < \lambda)\|^2 \|\psi_t\|^2. \end{aligned}$$

Die Norm des Multiplikationsoperators schätzen wir durch das Supremum ab:

$$\left\| \|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\| e^{-\beta|\mathbf{x}|} \right\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} \underbrace{\|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\|}_{\leq C|\mathbf{x}| \text{ (Lm. 6.3)}} e^{-\beta|\mathbf{x}|} \leq C \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3} |\mathbf{x}| e^{-\beta|\mathbf{x}|} < \infty.$$

Damit erhalten wir für (6.6) eine zeitunabhängige obere Schranke.

Abschätzung von (6.5): Es ist

$$|\langle \psi'_t, -\mathbf{x} \cdot \phi(i\chi_{0,t}\mathbf{G}_0)\psi'_t \rangle| \leq \sum_{j=1}^3 \|x_j \psi'_t\| \|\phi(i\chi_{0,t}\mathbf{G}_{0,j})\psi'_t\|.$$

Da U mit x_k vertauscht ist $\|x_k \psi'_t\| = \|x_k \psi_t\|$, was sich mittels des exponentiellen Abfalls zeitunabhängig abschätzen lässt. Zur Abschätzung des zweiten Faktors verwenden wir Lemma 6.2 und erhalten

$$\begin{aligned} \|\phi(i\chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j}) \psi'_t\| &\leq \|\phi(i\chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j}) \psi_t\| + \sqrt{2} \|\langle \mathbf{G}_{0,j}, \chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j} \rangle\| \cdot \|\mathbf{x} \psi_t\| \\ &\leq C \|\chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j}\|_{\omega} \|(H_f + 1)^{1/2} \psi_t\| + \sum_{k=1}^3 \sqrt{2} |\langle \mathbf{G}_{0,k}, \chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j} \rangle| \|x_k \psi_t\|. \end{aligned}$$

Da $(H_f + 1)(H + i)^{-1}$ beschränkt ist, finden wir eine zeitunabhängige obere Schranke für $\|(H_f + 1)^{1/2} \psi_t\|$. Weiter sind $\|\chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j}\|_{\omega}$ und $|\langle \mathbf{G}_{0,k}, \chi_{0,t} \mathbf{G}_{0,j} \rangle|$ gemäß Lemma 6.3 beide $\leq C$. Wir haben also auch für den Summanden (6.5) eine zeitunabhängige obere Schranke.

Abschätzung des Integrals aus (6.4):

Mit $\psi'_s = U \psi_s = e^{-iH's} \psi'_0$, $H' := U H U^*$ erhalten wir

$$\frac{d}{ds} \langle \psi'_s, d\Gamma(\chi_{0,s}) \psi'_s \rangle = \langle \psi'_s, [iH', d\Gamma(\chi_{0,s})] \psi'_s \rangle + \langle \psi'_s, d\Gamma\left(\frac{\partial \chi_{0,s}}{\partial s}\right) \psi'_s \rangle.$$

Da $\partial_s \chi_{0,s} \leq 0$ ist nach Lemma 6.2 auch $\langle \psi'_s, d\Gamma\left(\frac{\partial \chi_{0,s}}{\partial s}\right) \psi'_s \rangle \leq 0$, es bleibt der Kommutatorbeitrag abzuschätzen. Der Pauli-Fierz-transformierte Hamilton-Operator ist (vgl. [HS95] und $[A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})] = 0$; dies folgt aus $\kappa(-\mathbf{k}) = \kappa(\mathbf{k})$ und $\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda)_i \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda)_j = P(\mathbf{k})_{ij} = P(-\mathbf{k})_{ij}$)

$$H' = (\mathbf{p} + \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{0}))^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}) + H_f + (V + c\mathbf{x}^2),$$

mit $c > 0$ und $\mathbf{E}(\mathbf{0}) = -\phi(i\omega \mathbf{G}_{0,j})$ dem elektrischen Feld. Wir berechnen $[iH', d\Gamma(\chi_{0,s})]$ explizit und verwenden dann Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} |\langle \psi'_s, [iH', d\Gamma(\chi_{0,s})] \psi'_s \rangle| &\leq \sum_{j=1}^3 2 \|(\mathbf{p} + \phi(\mathbf{G}_{\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{0}}))_j \psi'_s\| \|\phi(i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_{\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{0}}))_j \psi'_s\| \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \|x_j \psi'_s\| \|\phi(\chi_{0,s} \omega \mathbf{G}_{0,j}) \psi'_s\|. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Wir schätzen im Folgenden die Faktoren dieser Abschätzung einzeln weiter ab. Mittels Lemma 6.2 haben wir:

$$\|\phi(i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_{\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{0}}))_j \psi'_s\| \leq \|\phi(i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_{\mathbf{x}} - \mathbf{G}_{\mathbf{0}}))_j \psi_s\| \quad (6.8)$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^3 |\langle \mathbf{G}_{0,k}, i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_{\mathbf{x},j} - \mathbf{G}_{\mathbf{0},j}) \rangle| x_k \psi_s \right\|. \quad (6.9)$$

Für den ersten Summanden (6.8) haben wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\phi(i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_\mathbf{x} - \mathbf{G}_0))_j \psi_s\|^2 &= \int d^3 \mathbf{x} \|\phi(i\chi_{0,s}(\mathbf{G}_\mathbf{x} - \mathbf{G}_0))_j e^{-\beta|\mathbf{x}|/2} e^{\beta|\mathbf{x}|/2} \psi_s(\mathbf{x})\|^2 \\
&\leq \int d^3 \mathbf{x} e^{-\beta|\mathbf{x}|} \underbrace{\|\chi_{0,s}(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j})\|_\omega^2}_{\leq C \langle \mathbf{x} \rangle s^{-3\delta} \text{ (Lm. 6.3)}} \|(H_f + 1)^{1/2} e^{\beta|\mathbf{x}|/2} \psi_s(\mathbf{x})\|^2 \\
&\leq C s^{-3\delta} \int d^3 \mathbf{x} \underbrace{e^{-\beta|\mathbf{x}|} \langle \mathbf{x} \rangle}_{\leq C} \|(H_f + 1)^{1/2} e^{\beta|\mathbf{x}|/2} \psi_s(\mathbf{x})\|^2 \\
&\leq C s^{-3\delta} \underbrace{\|e^{\beta|\mathbf{x}|/2} (H_f + 1)^{1/2} \psi_s\|^2}_{\leq \|e^{\beta|\mathbf{x}|} \psi_s\| \cdot \|(H_f + 1) \psi_s\| \leq C} \leq C s^{-3\delta}.
\end{aligned}$$

Den zweiten Summanden (6.9) schätzen wir mittels Lemma 6.3 ab:

$$\begin{aligned}
\| \langle G_{0,k}, i\chi_{0,s}(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j}) \rangle |x_k \psi_s \| &\leq \left\| \|G_{0,k}\|_2 \underbrace{\|\chi_{0,s}(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j})\|_2}_{\leq C s^{-3\delta/2} \langle \mathbf{x} \rangle} |x_k| \psi_s \right\| \\
&\leq s^{-3\delta/2} C \|G_{0,k}\|_2 \left\| \langle \mathbf{x} \rangle |x_k| e^{-\beta|\mathbf{x}|} \right\| \|e^{\beta|\mathbf{x}|} \psi_s\| \leq C s^{-3\delta/2}.
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Term $\|\phi(\chi_{0,s} \omega G_{0,j}) \psi'_s\|$ aus (6.7). Mit Lemma 6.2 sieht man, dass nur die 2-Norm und die ω -Norm von $\chi_{0,s} \omega G_{0,j}$ abzuschätzen bleiben. Mittels Lemma 6.3 folgt daher

$$\|\phi(\chi_{0,s} \omega G_{0,j}) \psi'_s\| \leq C s^{-3\delta/2}.$$

Es verbleibt von (6.7) noch abzuschätzen (hier wurde wieder Lemma 6.2 verwendet):

$$\|(\mathbf{p} + \phi(\mathbf{G}_\mathbf{x} - \mathbf{G}_0))_j \psi'_s\| \leq \|p_j \psi'_s\| + \|\phi(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j}) \psi_s\| + \| |\langle \mathbf{G}_0, G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j} \rangle| \cdot \mathbf{x} \psi_s \|.$$

Um $\|p_j \psi'_s\|$ abzuschätzen verwenden wir, dass $U^* p_j U = p_j + A_j(\mathbf{0})$, dass $p_j^2 (H + i)^{-1}$ nach dem Graphensatz beschränkt ist sowie Lemma 2.2.1. Für $\|\phi(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j}) \psi_s\|$ und $\| |\langle \mathbf{G}_0, G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j} \rangle| \cdot \mathbf{x} \psi_s \|$ finden wir unter Verwendung des exponentiellen Abfalls eine zeitunabhängige obere Schranke. Somit

$$\|(\mathbf{p} + \phi(\mathbf{G}_\mathbf{x} - \mathbf{G}_0))_j \psi'_s\| \leq C.$$

Damit ist der Integrand aus (6.4) fertig abgeschätzt.

Durch Zusammensetzen der Abschätzungen und Ausführen der Integration über s (hier geht $\delta < 2/3$ ein) finden wir

$$\langle \psi_t, N \psi_t \rangle \leq C(1 + t^\delta + t^{1-3\delta/2}).$$

Die Abschätzung wird optimal für $\delta = 2/5$. □

Im folgenden Lemma führen wir einige Abschätzungen zum vorigen Theorem auf.

Lemma 6.2. 1. Sei $f \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ und $\psi_s = e^{-iHs}\psi$ mit $\psi \in D(H)$ und $\psi \in D(N)$. Dann ist

$$\|\phi(f)e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}(0)}\psi_s\| \leq \|\phi(f)\psi_s\| + \sqrt{2}\|\langle \mathbf{G}_0, f \rangle \cdot \mathbf{x}\psi_s\|. \quad (6.10)$$

2. Seien g_1 und g_2 Lebesgue-messbare Funktionen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \leq g_1 \leq g_2$. Seien $d\Gamma(g_1)$ und $d\Gamma(g_2)$ die zweitquantisierten Operatoren zu den Multiplikationsoperatoren g_1 und g_2 . Dann ist $D(d\Gamma(g_2)) \subset D(d\Gamma(g_1))$ und

$$\langle \psi, d\Gamma(g_1)\psi \rangle \leq \langle \psi, d\Gamma(g_2)\psi \rangle \quad (6.11)$$

für alle $\psi \in D(d\Gamma(g_2))$.

3. Sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $g \leq 0$. Dann gilt $\langle \psi, d\Gamma(g)\psi \rangle \leq 0$ für alle $\psi \in D(d\Gamma(g))$.

Beweis. 1. Sei $U = e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}(0)}$. Wir stellen fest, dass $\|\phi(f)U\psi_t\| = \|U^*\phi(f)U\psi_t\|$ und berechnen $U^*\phi(f)U$ durch Entwicklung nach Kommutatoren.

2. Sei $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ und $\psi^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$, dem n -Teilchen-Unterraum. Es ist

$$\left| \sum_{i=1}^n g_1(\mathbf{k}_i)\psi^{(n)}(\mathbf{k}) \right|^2 = \left(\sum_{i=1}^n g_1(\mathbf{k}_i) \right)^2 |\psi^{(n)}(\mathbf{k})|^2 \leq \left| \sum_{i=1}^n g_2(\mathbf{k}_i)\psi^{(n)}(\mathbf{k}) \right|^2.$$

Damit ist klar, dass $D(d\Gamma(g_2)) \subset D(d\Gamma(g_1))$. Für die Ungleichung schreiben wir das Skalarprodukt als

$$\langle \psi, d\Gamma(g_1)\psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^3\mathbf{k}_1 \cdots d^3\mathbf{k}_n \overline{\psi^{(n)}(\mathbf{k})} \sum_{i=1}^n g_1(\mathbf{k}_i)\psi^{(n)}(\mathbf{k});$$

nun ist die Ungleichung offensichtlich.

3. Diese Ungleichung wird genau wie die vorige nachgerechnet. \square

Es folgen noch die angekündigten Norm-Abschätzungen. Hier ist $\kappa/\sqrt{\omega} \in L^2_\omega(\mathbb{R}^3)$ wichtig.

Lemma 6.3. Sei $\text{ess sup } \kappa < \infty$ und $\chi_{0,t}$ definiert wie im Beweis von Theorem 6.1. Sei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\omega$ oder $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Dann existieren Konstanten $C > 0$, sodass die folgenden Abschätzungen für alle $t \geq 0$ und alle $s > 0$ gelten:

1. $\|\sqrt{\chi_{0,t}}\mathbf{x} \cdot \mathbf{G}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{k})} \leq C|\mathbf{x}|$.
2. $\|\chi_{0,t}\mathbf{G}_{0,j}\| < C$, insbesondere $|\langle \mathbf{G}_{0,k}, \chi_{0,t}\mathbf{G}_{0,j} \rangle_{L^2}| < C$.
3. $\|\chi_{0,s}(G_{\mathbf{x},j} - G_{0,j})\| \leq C|\mathbf{x}|s^{-3\delta/2}$.
4. $\|\chi_{0,s}\omega\mathbf{G}_{0,j}\| \leq Cs^{-3\delta/2}$.

Beweis. Durch Ausschreiben der Normen als Integrale und Übergang zu Kugelkoordinaten verifiziert man diese Abschätzungen durch elementare Rechnung unter Verwendung insbesondere folgender Eigenschaften: $\chi_{0,t} \leq 1$, $\text{supp } \chi_{0,t} \subset [0, 2t^{-\delta}]$, $|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - 1| \leq |\mathbf{k}||\mathbf{x}|$. \square

A. Zweite Quantisierung

A.1. Fockraum und Zweite Quantisierung

Wir erinnern hier kurz an die Definitionen von Fockraum, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und die zweite Quantisierung von Einteilchenoperatoren. Dieses Unterkapitel ist an [HH08] angelehnt. Detailliertere Einführungen in die zweite Quantisierung bieten z. B. [RS75, Section X.7] und [BR81, Section 5.2.1].

Sei \mathfrak{h} ein Hilbertraum und $\otimes^n \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}$ das n -fache Tensorprodukt. Wir setzen $\otimes^0 \mathfrak{h} := \mathbb{C}$. Auf $\otimes^n \mathfrak{h}$ definieren wir die orthogonale Projektion auf total-symmetrische Tensoren via Summation über alle Permutationen durch

$$S_n(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varphi_{\sigma(1)} \otimes \varphi_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(n)}.$$

Der Hilbertraum

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n(\otimes^n \mathfrak{h})$$

heißt symmetrischer oder bosonischer *Fockraum*. Ein Vektor $\psi \in \mathcal{F}$ ist eine Folge $(\psi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\psi^{(n)} \in \mathcal{F}_n$ und $\|\psi\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi^{(n)}\|^2 < \infty$.

Das Skalarprodukt von \mathcal{F} ist gegeben durch $\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi^{(n)}, \psi^{(n)} \rangle$.

Der Vektor $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$ heißt *Vakuum*. Wir definieren den Unterraum

$$\mathcal{F}_0 = \{\psi \in \mathcal{F} : \psi^{(n)} = 0 \text{ außer für endlich viele } n\}.$$

Sei A ein Operator in \mathfrak{h} mit Definitionsbereich $D(A)$. Der zweitquantisierte Operator $d\Gamma(A)$ wird wie folgt definiert: Sei $A_{(n)}$ der Abschluss des Operators

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{A}_{\text{Position } k} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} : S_n(\otimes_{\text{alg}}^n D(A)) \rightarrow \otimes^n \mathfrak{h}$$

(\otimes_{alg} ist das algebraische Tensorprodukt, bestehend nur aus endlichen Linearkombinationen von Elementartensoren). Dann setzen wir als Definitionsbereich

$$D(d\Gamma(A)) = \{\psi \in \mathcal{F} : \psi^{(n)} \in D(A_{(n)}) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \|A_{(n)} \psi^{(n)}\|^2 < \infty\}$$

und definieren $d\Gamma(A)$ durch $(d\Gamma(A)\psi)^{(n)} = A_{(n)} \psi^{(n)}$. Falls A selbstadjungiert ist, so ist auch $d\Gamma(A)$ selbstadjungiert. Ein Beispiel ist der Anzahloperator $N = d\Gamma(\mathbb{1})$.

Weiterhin benötigen wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Für $h \in \mathfrak{h}$ definieren wir den *Erzeuger* $a^*(h)$ durch

$$a^*(h)\varphi = \sqrt{n+1}S_{n+1}h \otimes \varphi \text{ für } \varphi \in S_n(\otimes^n \mathfrak{h}),$$

weiten diese Definition auf \mathcal{F} aus und nehmen den Abschluss. Dieser sei fortan ebenfalls mit $a^*(h)$ bezeichnet. Der *Vernichter* $a(h)$ wird als adjungierter Operator von $a^*(h)$ definiert. Es gilt $a(h)\Omega = 0$ für alle $h \in \mathfrak{h}$ und

$$a(h)S_n(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \langle h, \varphi_i \rangle S_{n-1}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_{i-1} \otimes \varphi_{i+1} \otimes \cdots \otimes \varphi_n).$$

Wir definieren den *Segal-Feldoperator* $\phi(h)$ als Abschluss des Operators $\frac{1}{\sqrt{2}}(a(h) + a^*(h))$ auf \mathcal{F}_0 . Für alle $h \in \mathfrak{h}$ ist $\phi(h)$ wesentlich-selbstadjungiert auf \mathcal{F}_0 . Die *Weyl-Operatoren* sind definiert als die unitären Operatoren $W(h) := e^{i\phi(h)}$ und haben gegenüber den Segal-Feldoperatoren den Vorteil beschränkt zu sein.

Seien $g, h \in \mathfrak{h}$. Auf \mathcal{F}_0 gelten die *kanonischen Kommutatorrelationen (CCR)*

$$[a(g), a^*(h)] = \langle g, h \rangle_{\mathfrak{h}} \mathbb{1}, \quad [a(g), a(h)] = 0 = [a^*(g), a^*(h)].$$

Für die Segal-Feldoperatoren erhalten wir daraus $[\phi(g), \phi(h)] = i \operatorname{Im} \langle g, h \rangle_{\mathfrak{h}}$.

Falls A ein Operator auf \mathfrak{h} ist, so gilt $[d\Gamma(A), a^*(g)] = a^*(Ag)$ und $[d\Gamma(b), a(g)] = -a(A^*g)$ (wenn g in $D(A)$ bzw. $D(A^*)$ liegt). Ist A selbstadjungiert, so haben wir ferner $i[d\Gamma(A), \phi(g)] = \phi(iAg)$.

A.2. Zur Definition des quantisierten Vektorpotentials

Wir erklären in diesem Unterkapitel die Definition des quantisierten Vektorpotentials. In der Einführung, Unterkapitel 1.1, hatten wir das quantisierte Vektorpotential folgendermaßen angegeben:

$$A(\alpha \mathbf{x}) = a(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}) + a^*(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\kappa(\mathbf{k})}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\alpha \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{A.1})$$

mit dem Hinweis, dass die \mathbf{x} -Abhängigkeit wie bei einem Multiplikationsoperator bzgl. der Elektronkoordinate zu verstehen ist. Wir wollen hier präzise definieren, was darunter zu verstehen ist.

Wir definieren einen isometrischen Isomorphismus $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F} \cong L^2(\mathbb{R}^3; \mathcal{F})$. Sei dazu $\varphi \otimes \eta \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$ ein Elementartensor. Für fast-alles $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$(\varphi \otimes \eta)(\mathbf{x}) := \underbrace{\varphi(\mathbf{x})}_{\in \mathbb{C}} \eta \in \mathcal{F}.$$

Der Isomorphismus ist die Ausdehnung von $\varphi \otimes \eta \mapsto (\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x})\eta)$ auf \mathcal{H} .

Wir können also zu jedem $\psi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$ fast-überall ein $\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}$ definieren. Zu festem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sind $a(\mathbf{G}_{\mathbf{x}})$ und $a^*(\mathbf{G}_{\mathbf{x}})$ als normale Vernichter und Erzeuger auf \mathcal{F}

definiert; \mathbf{x} fungiert hier lediglich als Parameter einer Schar von Funktionen $\mathbf{G}_{\mathbf{x}} : \mathbf{k} \mapsto \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{k})$. Das quantisierte Vektorpotential definieren wir mittels des gerade definierten Isomorphismus durch

$$(\mathbf{A}\psi)(\mathbf{x}) := (a(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}) + a^*(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}))\psi(\mathbf{x}). \quad (\text{A.2})$$

Insbesondere ist der Operator \mathbf{A} auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}$ definiert, nicht auf \mathcal{F} alleine.

Die Schreibweise (A.1) ist ein Missbrauch der Notation und meint eigentlich den Operator definiert durch (A.2). Für praktische Rechnungen hat sich dieser Missbrauch aber eingebürgert. Tatsächlich wirkt z. B. der Impulsoperator auf die \mathbf{x} -Koordinate von $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x})$ als (schwache) Ableitung, siehe [HH08, Lemma 13].

A.3. Notation

Wir geben noch einige Definitionen und Konventionen an. Bei der Bezeichnung von Funktionenräumen geben wir den Bildbereich nur an wenn er von \mathbb{C} abweicht, z. B. $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ für komplexwertige quadratintegrierbare Funktionen auf \mathbb{R}^3 , aber $C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ für \mathbb{C}^3 -wertige Funktionen (hier beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger).

Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\lambda=1}^2 \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\mathbf{k}, \lambda)} g(\mathbf{k}, \lambda) d^3\mathbf{k}.$$

Wir definieren

$$\|f\|_\omega^2 := \sum_{\lambda=1}^2 \int |f(\mathbf{k}, \lambda)|^2 \left(1 + \frac{1}{\omega(\mathbf{k})}\right) d^3\mathbf{k}$$

und den Raum

$$L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) : \|f\|_\omega^2 < \infty\},$$

welcher mit der Norm $\|\cdot\|_\omega$ ein normierter Raum wird. Offenbar ist $\|f\|_\omega \geq \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ und daher $L_\omega^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \subset L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$.

Stellenweise erlauben wir uns den Notationsmissbrauch eine Funktion f mit ihren Werten $f(\mathbf{k})$ zu bezeichnen; so meint auch z. B. $|\mathbf{x}|$ in manchem Kontext den Multiplikationsoperator mit dem Betrag der Elektronkoordinate und $D(|\mathbf{x}|)$ dessen Definitionsbereich.

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$, dann definieren wir $\varepsilon f \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ durch

$$(\varepsilon f)(\mathbf{k}) := \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \lambda) f(\mathbf{k}, \lambda). \quad (\text{A.3})$$

Die Abbildung $f \mapsto \varepsilon f$ ist eine Isometrie.

Um zu betonen welches Skalarprodukt bzw. welche Norm wir verwenden schreiben wir manchmal $\|\psi\| = \|\psi\|_{\mathcal{F}}$, $\langle g, h \rangle = \langle g, h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ und ähnliches.

Die Fouriertransformation auf L^2 wird mit \mathcal{F} bezeichnet, für die Fouriertransformierte einer Funktion f schreiben wir auch \hat{f} .

Wir verwenden das Symbol C oft mehrfach für endliche Konstanten verschiedenen Wertes ohne weiter auf die Umdefinition hinzuweisen. Um *zusätzlich* zu betonen von welchen Parametern C abhängt schreiben wir manchmal $C(m, \varepsilon)$, C_m u. ä.

Der Ausdruck +c.c. steht für das Komplex-konjugierte aller in der Klammer vorgehenden Summanden, Beispiel: für $x, y, z \in \mathbb{C}$ ist $z(x + y + \text{c.c.}) = z(x + y + \overline{x + y})$.

Wo sowohl ein Vernichter a als auch ein Erzeuger a^* stehen kann schreiben wir $a^\#$ als Platzhalter. Seien $h_i \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ für $i = 1, \dots, n$, dann schreiben wir zur Verkürzung der Notation $\underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$ und $a^\#(\underline{h}) = a^\#(h_1) \cdots a^\#(h_n)$ (worin sich Erzeuger und Vernichter beliebig abwechseln können), genauso für asymptotische Erzeuger und Vernichter $a_\pm^\#(\underline{h})$.

Es sei $\omega : D(\omega) \subset L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\omega(\mathbf{k}, \lambda) = \omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$. Wir definieren

$$\underline{h}_t = (e^{-i\omega t} h_1, \dots, e^{-i\omega t} h_n) \text{ und } a_t^*(\underline{h}_t) := e^{iH_\alpha t} a^*(\underline{h}_t) e^{-iH_\alpha t}.$$

Symbolverzeichnis

- Relaxation in den Grundzustand, Seite 6
- +c.c. Komplex-konjugiertes der vorhergehenden Summanden, Seite 72
- [,] Kommutator
- α Feinstrukturkonstante, Seite 3
- $\chi(H < \Sigma)$ Spektraler Projektor bzgl. eines selbstadjungierten Operators H
- $\chi_{\{|\mathbf{x}| \leq R\}}$ Charakteristische Funktion des Balls $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, auch als Multiplikationsoperator bzgl. der Elektronkoordinate
- \mathbb{C}_S Menge der komplexen Zahlen z mit $\operatorname{Re} z > -S$, Seite 38
- $d\Gamma(A)$ Zweite Quantisierung eines Operators A , Seite 69
- $\underline{h}^{l_1, \dots, l_p}$ Photonenzustand \underline{h} , auf welchen an den Stellen l_i der Operator ω angewandt wurde, Seite 62
- \mathcal{F} symmetrischer (bosonischer) Fockraum, Seite 69
- \mathcal{F} Fouriertransformation in L^2 , Seite 72
- $\hat{\rho}$ Ultraviolett-Cutoff und fouriertransformierte Ladungsverteilung, Seite 33
- \hat{f} Fouriertransformierte von f , Seite 72
- \hat{h} Eine oft auftretende Funktion, Seite 37
- \hat{h}^{-1} Eine oft auftretende Funktion, Seite 43
- \mathcal{H} Hilbertraum des gekoppelten Systems aus Elektron und Photonenfeld, Seite 3
- \mathcal{H}_{el} Hilbertraum der Ein-Elektron-Zustände, Seite 3
- κ Ultraviolett-Cutoff, Seite 4
- lim Konvergenz in Hilbertraum-Norm, soweit nicht anders angegeben
- $L^2_\omega(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ Normierter Raum von Ein-Photon-Zuständen mit Norm $\| \cdot \|_\omega$, Seite 71
- $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Raum der beschränkten Operatoren $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

\mathcal{S}	Schwartz-Raum
\mathcal{M}	Mellin-Transformation, Seite 22
Ω	Vakuumvektor im Fockraum, Seite 69
ω	Photondispersionsrelation, Seite 3
$\phi(h)$	Segal-Feldoperator, Seite 70
ψ_α	Grundzustand, Seite 4
ψ_g	Grundzustand für $\alpha = 1$, Seite 4
ρ	Ladungsverteilung, Seite 33
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt, Seite 71
$\langle u, Jx \rangle$	Segal-Feldoperator für Freiheitsgrade von Oszillator und Feld gekoppelt, Seite 48
Σ	Ionisierungsschwelle, Seite 5
$\tilde{\mathcal{A}}$	Algebra lokalisierter Observablen, Seite 6
$\ \cdot \ _\omega$	ω -Norm, Seite 71
εf	Isometrie $\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$, $f \mapsto \varepsilon f$, Seite 71
$\varepsilon(\mathbf{k}, \lambda)$	Polarisationsvektoren, Seite 4
\mathbf{A}	In Unterkapitel 4.1: klassisches Vektorpotential in Coulomb-Eichung, Seite 34
$\mathbf{A}, \mathbf{A}(\mathbf{x})$	Quantisiertes elektromagnetisches Feld in Coulomb-Eichung, Seite 3
\mathbf{A}_ρ	mit der Ladungsverteilung ρ um den Ursprung ausgeschmiertes quantisiertes Vektorpotential, Seite 33
\mathbf{p}	Impulsoperator des Elektrons, Seite 3
A	Dilatationserzeuger, Seite 21
$a^\#$	Platzhalter für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, Seite 72
a_\pm^*	asymptotische Erzeugungsoperatoren, Seite 5
$a_t^*(\underline{h}_t)$	Erzeugungsoperator mit zusätzlicher Zeitentwicklung, Seite 72
$C, C(m, \varepsilon), C_m$	Konstanten mit kommentarlos von Gleichung zu Gleichung verschiedenen Werten, Seite 72
C_0^∞	beliebig oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger, Seite 71
$D(\rho)$	Ein oft auftretendes Integral, Seite 43

$D(A)$	Definitionsbereich des Operators A
E	Grundzustandsenergie für $\alpha = 1$, Seite 4
E	in Kapitel 3: Energiedifferenz zwischen einem angeregten Eigenzustand und dem Grundzustand bei $\alpha = 0$, Seite 26
e	Elektronladung oder Eulersche Zahl, Seite 33
E_α	Grundzustandsenergie, Seite 4
H	Voller Hamilton-Operator mit Feinstrukturkonstante $\alpha = 1$, Seite 5
H_α	Voller Hamilton-Operator mit Feinstrukturkonstante $\alpha \geq 0$, Seite 3
H_{el}	Hamilton-Operator des Atoms ohne quantisiertes elektromagnetisches Feld, Seite 26
H_f	Energie des quantisierten elektromagnetischen Feldes, Seite 3
h_t	Photonzustand zur Zeit t unter freier Zeitentwicklung, Seite 72
$L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$	Ein-Photon-Hilbertraum mit Helizitätsfreiheitsgrad, Seite 71
N	Anzahloperator der Photonen, Seite 69
$P(\mathbf{k})$	Projektion auf den transversalen Teil, Seite 11
R_0	Resolvente des Hamilton-Operators ohne Wechselwirkung, Seite 56
R_α	Resolvente des Hamilton-Operators, Seite 56
V	Skalares Potential in Coulomb-Eichung, als Multiplikationsoperator, Seite 3
$W(f)$	Weyl-Operator, Seite 70
W_α	Wechselwirkungsoperator, Seite 56
$W_R(t)$	Wechselwirkungsoperator mit wechselwirkender Resolvente und nicht-wechselwirkender Zeitentwicklung, Seite 56
$W_{R_0}(t), W_{R_0}$	Wechselwirkungsoperator mit nicht-wechselwirkender Resolvente und nicht-wechselwirkender Zeitentwicklung, Seite 58
CCR	kanonische Kommutatorrelationen, Seite 4

Literaturverzeichnis

- [AB76] AICHELBURG, P. C. ; BERG, R.: Radiation Damping as an Initial Value Problem. In: *Annals of Physics* 98 (1976), S. 264–283
- [Ara81] ARAI, Asao: On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized massless scalar field I, II. In: *J. Math. Phys.* 22 (1981), S. 2539–2548, 2549–2552
- [Ara83] ARAI, Asao: Rigorous Theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics. In: *J. Math. Phys.* 24 (1983), S. 1896–1910
- [Ara91] ARAI, Asao: Long-time behavior of an electron interacting with a quantized radiation field. In: *J. Math. Phys.* 32 (1991), Nr. 8, S. 2224–2242
- [BFP06] BACH, Volker ; FRÖHLICH, Jürg ; PIZZO, Alessandro: Infrared-Finite Algorithms in QED I. The Groundstate of an Atom Interacting with the Quantized Radiation Field. In: *Commun. Math. Phys.* 264 (2006), Nr. 1, S. 145–165
- [BFP07a] BACH, Volker ; FRÖHLICH, Jürg ; PIZZO, Alessandro: An Infrared-Finite Algorithm for Rayleigh Scattering Amplitudes, and Bohr’s Frequency Condition. In: *Commun. Math. Phys.* 274 (2007), S. 457–486
- [BFP07b] BACH, Volker ; FRÖHLICH, Jürg ; PIZZO, Alessandro: Infrared-finite algorithms in QED II. The expansion of the groundstate of an atom interacting with the quantized radiation field. In: *Adv. Math.* 220 (2007), Nr. 4, S. 1023–1074
- [BFS99] BACH, Volker ; FRÖHLICH, Jürg ; SIGAL, Israel M.: Spectral Analysis for Systems of Atoms and Molecules Coupled to the Quantized Radiation Field. In: *Commun. Math. Phys.* 207 (1999), S. 249–290
- [BM48] BOCHNER, Salomon ; MARTIN, William T.: *Princeton Mathematical Series*. Bd. 10: *Several Complex Variables*. Princeton : Princeton University Press, 1948
- [BR81] BRATTELI, Ola ; ROBINSON, Derek W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. Bd. II: *Equilibrium States Models in Quantum Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981
- [Dow98] DOWLING, Jonathan P.: The Classical Lamb Shift: Why Jackson is Wrong! In: *Foundations of Physics* 28 (1998), Nr. 5, S. 855–862

- [FGS01] FRÖHLICH, Jürg ; GRIESEMER, Marcel ; SCHLEIN, Benjamin: Asymptotic Electromagnetic Fields in Models of Quantum-Mechanical Matter Interacting with the Quantized Radiation Field. In: *Advances in Mathematics* 164 (2001), S. 349–398
- [FGS02] FRÖHLICH, Jürg ; GRIESEMER, Marcel ; SCHLEIN, Benjamin: Asymptotic Completeness for Rayleigh Scattering. In: *Ann. Henri Poincaré* 3 (2002), Nr. 1, S. 107–170
- [FGS08] FRÖHLICH, Jürg ; GRIESEMER, Marcel ; SIGAL, Israel M.: Spectral Theory for the Standard Model of Non-Relativistic QED. In: *Communications in Mathematical Physics* 283 (2008), S. 613–646
- [FL10] FISCHER, Wolfgang ; LIEB, Ingo: *Einführung in die Komplexe Analysis – Elemente der Funktionentheorie*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010
- [GLL01] GRIESEMER, Marcel ; LIEB, Elliot H. ; LOSS, Michael: Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. In: *Invent. math.* 145 (2001), S. 557–595
- [Gri04] GRIESEMER, Marcel: Exponential decay and ionization thresholds in non-relativistic quantum electrodynamics. In: *J. Funct. Anal.* 210 (2004), S. 321–340
- [Gri06] GRIESEMER, Marcel: Non-relativistic Matter and Quantized Radiation. In: *Lect. Notes Phys.* 695 (2006), S. 217–248
- [GZ09a] GRIESEMER, Marcel ; ZENK, Heribert: Asymptotic electromagnetic fields in non-relativistic QED: The problem of existence revisited. In: *J. Math. Anal. Appl.* 354 (2009), S. 339–346
- [GZ09b] GRIESEMER, Marcel ; ZENK, Heribert: On the Atomic Photoeffect in Non-relativistic QED. In: *arXiv:0910.1809v1 [math-ph]* (2009)
- [HH08] HASLER, David ; HERBST, Ira: On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians. In: *Rev. Math. Phys.* 20 (2008), Nr. 7, S. 787–800
- [HH10] HASLER, David ; HERBST, Ira: Convergent expansions in non-relativistic QED. In: *arXiv:1005.3522v1 [math-ph]* (2010)
- [Hir00] HIROSHIMA, Fumio: Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics. II. In: *J. Math. Phys.* 41 (2000), Nr. 2, S. 661–674
- [HS89] HONSELAERS, C. ; SCHMIDT, B. G.: Exact solutions for a simple model of radiation damping. In: *Class. Quantum Grav.* 6 (1989), S. 867–874
- [HS95] HÜBNER, Matthias ; SPOHN, Herbert: Radiative Decay: Nonperturbative Approaches. In: *Reviews in Mathematical Physics* 7 (1995), Nr. 3, S. 363–387

- [HSS99] HUNZIKER, Walter ; SIGAL, Israel M. ; SOFFER, Avy: Minimal escape velocities. In: *Communications in Partial Differential Equations* 24 (1999), Nr. 11, S. 2279–2295
- [Hun90] HUNZIKER, Walter: Resonances, Metastable States and Exponential Decay Laws in Perturbation Theory. In: *Commun. Math. Phys.* 132 (1990), S. 177–188
- [Jac75] JACKSON, John D.: *Classical Electrodynamics*. Second Edition. John Wiley & Sons, New York, 1975
- [Kra82] KRANTZ, Steven G.: *Function theory of several complex variables*. John Wiley & Sons, New York, 1982 (Pure and Applied Mathematics)
- [Ric04] RICHARD, Serge: Minimal Escape Velocities for Unitary Evolution Groups. In: *Ann. Henri Poincaré* 5 (2004), Nr. 5, S. 915–928
- [RS75] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics*. Bd. II: *Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975
- [RS79] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics*. Bd. III: *Scattering Theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979
- [RS80] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics*. Bd. I: *Functional Analysis*. Revised and enlarged edition. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], San Diego, 1980
- [RZ76] RZAŻEWSKI, K. ; ŻAKOWICZ, W.: Initial value problem and causality of radiating oscillator. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 9 (1976), Nr. 7, S. 1159–1170
- [Spo97] SPOHN, Herbert: Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. In: *J. Math. Phys.* 38 (1997), Nr. 5, S. 2281–2296
- [Spo04] SPOHN, Herbert: *Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field*. Cambridge University Press, 2004
- [ST64] SCHWABL, Franz ; THIRRING, Walter: Quantum theory of laser radiation. In: *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften* 36 (1964), S. 219–242. – Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg
- [Ste83] STEWART, John M.: A Simple Model for Radiation Damping. In: *General Relativity and Gravitation* 15 (1983), Nr. 5, S. 425–433
- [Tes09] TESCHL, Gerald: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 9: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*. American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2009

- [Wei03] WEIDMANN, Joachim: *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendungen*. B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden Stuttgart, 2003

Danksagung

Besonders danken möchte ich Prof. Fröhlich und Prof. Wunner für die Zweitbetreuung dieser Arbeit.

Gregor Bransky und Matthias Fetzler danke ich fürs Korrekturlesen.

Die sGruppe vom Naturwissenschaftlichen Kolleg und besonders Prof. Schrempp waren mir während des gesamten Studiums eine große Motivation, auch hierfür möchte ich mich bedanken.

Erklärung

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Weinstadt, den 10. Februar 2011

Niels Benedikter