Matematica del continuo

Temi:
(1) limiti di funzioni
(2) funzioni continue
(3) derivate
(4) studio di funzioni: massimi, minimi
(5) formule di Taylor
(6) integrali
(7) "basics" equazioni differenziali.

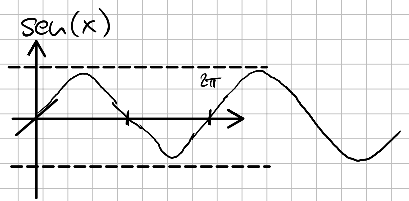
Esercizi su ARIEL ogni mercoledì sera.
Da risolvere a casa prima della lezione di martedì della settimana prossima.

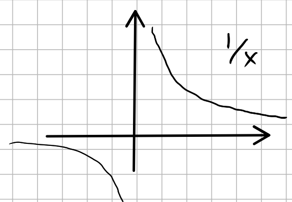
(1) Limiti di funzioni

Esempio: Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

È definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

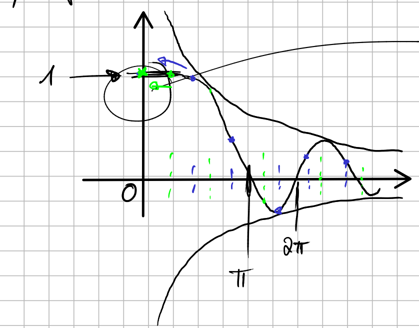




Osservazione: $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x \in 0.$$

$$y = f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$



Cosa succede per x vicino a $x_0 = 0$?

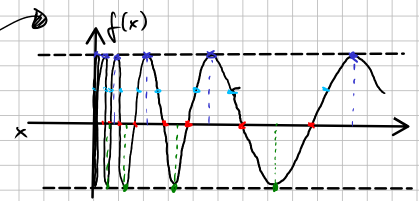
verde, blu: successioni $x_n \to 0$.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99834	0,999983	0,99999998	0,99999999...

Idea: "$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ tende a 1 per x che tende a 0."

(Cosa significa esattamente?
Dobbiamo scrivere una definizione!

Non vogliamo questa situazione



$f(x_n) = 1$

$f(\tilde{\tilde{x}}_n) = 0$

$f(\tilde{x}_n) = -1$

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad -1 \leq f(x) \leq +1$$

Definizioni: Se a, b sono numeri reali con $b > a$, per indicare un intervallo di estremi a e b, scriviamo:

$\longrightarrow [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$\longrightarrow (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ chiuso a sinistra e aperto a destra

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ aperto a sinistra, chiuso a destra

Intervalli illimitati:

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$.

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Definizione: Un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo aperto contenente x_0.

Esempio: $(x_0 - \delta, x_0 + 5\delta)$ con un $\delta > 0$ è un intorno di x_0.

Gli intervalli $(x_0, x_0 + \delta)$ e $(x_0 - \delta, x_0]$ non sono intorni di x_0.

Definizione: Consideriamo una funzione f definita su un insieme A che è un intervallo o unione finita di intervalli.

Consideriamo x_0 che appartiene ad A o è estremo ad uno di tali intervalli.

Si dice che f tende ad ℓ per x che tende ad x_0 se: per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A$, e con $x_n \neq x_0$ (per ogni x_n) risulta $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

Si scrive: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ oppure $f(x) \xrightarrow{(x \to x_0)} \ell$.

Si dice: "f ha limite uguale ad ℓ per x che tende a x_0".
"f converge ad ℓ per x che tende a x_0".

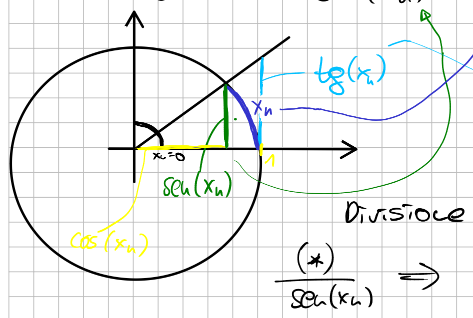
Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

Dimostrazione: Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow 0$ e $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Per n sufficientemente grande abbiamo $|x_n| < \frac{\pi}{2}$.

Prima possibilità: $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$:

abbiamo $\operatorname{sen}(x_n) < x_n < \operatorname{tg}(x_n) = \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{\cos(x_n)}$. $(*)$



$0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ implica anche $\operatorname{sen}(x_n) > 0$.

Divisione da $\operatorname{sen}(x_n)$:

$$\frac{(*)}{\operatorname{sen}(x_n)} \Rightarrow 1 < \frac{x_n}{\operatorname{sen}(x_n)} < \frac{1}{\cos(x_n)}.$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} > \cos(x_n). \quad (**)$$

Seconda possibilità: $-\frac{\pi}{2} < x_n < 0$.

$$1 > \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \frac{-\operatorname{sen}(x_n)}{-x_n} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(-x_n)}{-x_n}}_{\text{si usa } (**)}$$

$$> \cos(-x_n) = \cos(x_n).$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} > \cos(x_n) \quad \text{per ogni } n \text{ grande.}$$

$$\downarrow$$

$$1 \quad \text{per } x_n \longrightarrow 0.$$

$\Rightarrow$ Teorema dei carabinieri $\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \longrightarrow 1$. ■

Esempio: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$.

Dimostrazione: Sia x_n una successione con $\boxed{x_n \to 0}$, e con $x_n \neq 0$.

Per n grande: $\boxed{-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}}$.

Per $x_n > 0$: $0 < \operatorname{sen}(x_n) < x_n$.

Per $x_n < 0$: $x_n < \operatorname{sen}(x_n) < 0$.

$\Rightarrow \underbrace{-|x_n|}_{\downarrow\, 0} < \operatorname{sen}(x_n) < \underbrace{|x_n|}_{\downarrow\, 0}$ per ogni n grande.

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$. ■

Teorema: Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e soltanto se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ e\ x \neq x_0 \\ e\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$

Scegliamo prima ε piccolo, poi δ piccolo.

$\Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Dimostrazione: domani.

Esempio: Ancora una volta: $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \longrightarrow 1 \quad (x \to 0)$.

Dimostrazione: Sia $\varepsilon > 0$.

Abbiamo $\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1$.

Per x molto piccolo: $\cos(x) > 1 - \varepsilon$.

Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$-\delta < x < \delta \Rightarrow 1 - \varepsilon < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1$. ■

"Metodo ε-δ può essere più semplice."

Definizione: Limiti infiniti:

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Si dice: "$f$ diverge ad $+\infty$ per $x \longrightarrow x_0$".

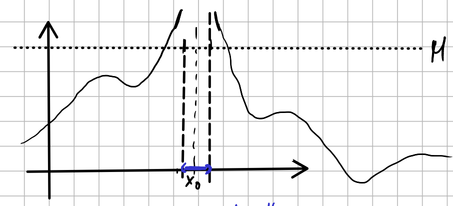
def. $\Longleftrightarrow \forall x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$.

$\Longleftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$ e $x \neq x_0$ e $x \in A \Rightarrow f(x) > M$.

"δ piccolo"

"M grande"

pensa di "$+\infty - \varepsilon$" (che non esiste)



intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

"prima scegliere M grande, poi δ piccolo"

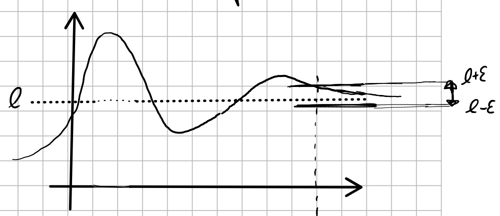
(2) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$

$\Longleftrightarrow \forall x_n \longrightarrow +\infty$ con $x_n \in A$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$: $x > K \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

ε piccolo

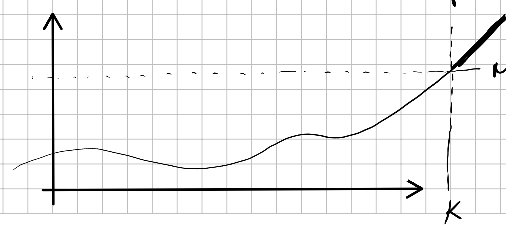
K grande



(3) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\Longleftrightarrow \forall x_n \to \infty$ con $x_n \in A$: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$

$\Longleftrightarrow \forall M > 0\ \exists K > 0$: $x > K \Rightarrow f(x) > M$.



Esempio: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Dimostrazione: $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Usiamo (1) con $x_0 = 1$.

Sia $M > 0$. Per $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ abbiamo:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M.$$

Menti:

Siano f, g, h, i funzioni con dominio $A = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, definite come

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x > 0 \\ -\sin(x) & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} |x|\sin(x) & \text{per } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|}\sin(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

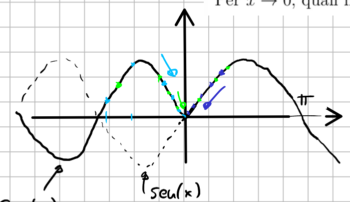
$$h(x) := \begin{cases} |x|\sin(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases} \qquad i(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Per $x \to 0$, quali limiti esistono?

Risposte giuste:

f, h, i: limiti esistono.

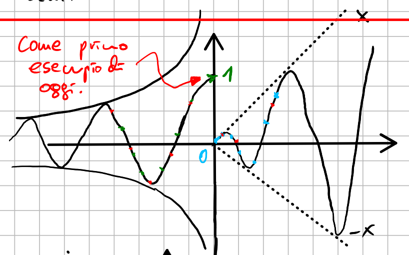
f:



$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ -\text{sen}(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Esiste.

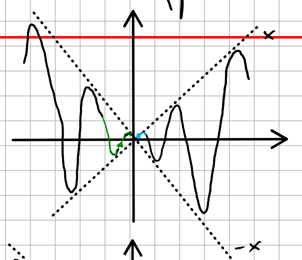
g:



$$g(x) = \begin{cases} |x|\,\text{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|}\text{sen}(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Limite non esiste.

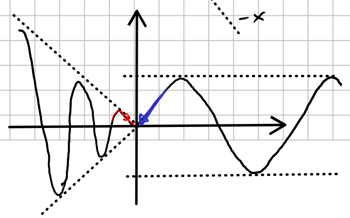
h:



$$h(x) = \begin{cases} |x|\,\text{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$. esiste.

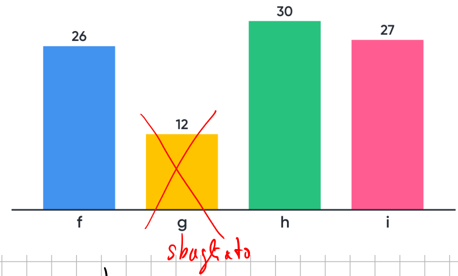
i:



$$i(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{per } x > 0 \\ |x|\cos(x) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} i(x) = 0$. esiste.

40 risposte.



Definizione: Limite destro e sinistro:

(1) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

$\Leftrightarrow$ per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n > x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $x \in (x_0, x_0+\delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$.

(2) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$

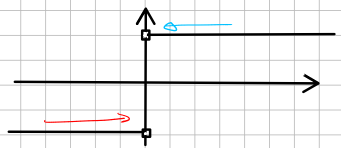
$\Leftrightarrow$ $\forall x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A$ e $x_n < x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $x \in (x_0-\delta, x_0) \cap A \Rightarrow f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$.

Esempio: $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Per $x \in A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

per $x > 0$: $|x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1$.

per $x < 0$: $|x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

Teorema: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ esistono e sono uguali.

Dimostrazione: domani. !

[pagine 87-101 del libro]

Def.: (di ieri) f tende ad ℓ per x che tende ad x_0 se, per ogni successione $x_n \longrightarrow x_0$, con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, risulta $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

Teorema: (di ieri) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ esistono e sono uguali.

Dimostrazione:

"$\Rightarrow$" Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow x_0$ e $x_n > x_0$. Allora ovviamente x_n è anche una successione con $x_n \longrightarrow x_0$. Allora $f(x_n) \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Anche per $x_n < x_0$: $f(x_n) \longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$.

"$\Leftarrow$" Usiamo il metodo "ε e δ".

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $\delta > 0$ con: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

$$\Rightarrow \Big| f(x) - \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{=\ell} \Big| < \varepsilon. \quad (*)$$

Siccome $\lim_{x\to x_0+}$ esiste: $\exists\, \delta_1 > 0$ con

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \Big|f(x) - \lim_{x\to x_0+} f(x)\Big| < \varepsilon.$$

Siccome $\lim_{x\to x_0-}$ esiste: $\exists\, \delta_2 > 0$ con

$$x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow \Big|f(x) - \underbrace{\lim_{x\to x_0-} f(x)}_{= \lim_{x\to x_0+} f(x)}\Big| < \varepsilon.$$

Dobbiamo scegliere $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e abbiamo dimostrato $(*)$. ■

Esempio:

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \cancel{\frac{4\pi}{e}} & \cancel{\text{se } x = 0} \\ x \cdot \operatorname{sen}(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non entra

limiti per $x \to 0+$, $x \to 0-$, $x \to 0$ esistono?

Limite destro: $-1 \le \operatorname{sen}(x) \le 1 \Rightarrow -x \le x \operatorname{sen}(x) \le x$.

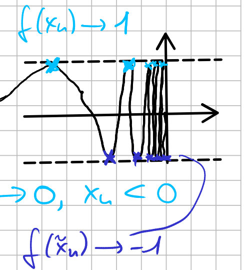
Sia x_n una successione con $x_n \to 0$ e $x_n > 0$:

$$\underset{\downarrow\atop 0}{-x_n} \le x_n \operatorname{sen}(x_n) \le \underset{\downarrow\atop 0}{x_n}$$

Teorema dei carabinieri

$\Rightarrow x_n \operatorname{sen}(x_n) \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$.

Limite sinistro: per $x < 0$: $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$



$\lim_{x\to 0-} f(x)$ non esiste.

Anche $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

Teorema: (di ieri) Sia f una funzione con dominio A. Sia $x_0 \in A$ oppure un estremo di un intervallo. Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Le seguenti relazioni sono equivalenti:

(1) $\forall$ successione $x_n \longrightarrow x_0$ con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$: $f(x_n) \longrightarrow \ell$.

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta$ e $x \in A \setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow |\ell - f(x)| < \varepsilon$.

non fatto ieri

Dimostrazione: "(2) $\Rightarrow$ (1)": Sia x_n una successione con $x_n \longrightarrow x_0$ e $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ $\forall n$.

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare n suff. grande per $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.

(3)

Usiamo (2): $\exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Ma seguendo la def. di "$x_n \longrightarrow x_0$":

$\exists N \in \mathbb{N}$ con $n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$.

Allora $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.

"$(1) \Rightarrow (2)$": Possiamo anche dimostrare "$\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$". "non"/negazione

"Se piove la strada è bagnata" $\Longleftrightarrow$ "Se la strada non è bagnata, non piove."

(2) era: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Si può anche dire:

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x$ con $|x-x_0|<\delta: |f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Negazione

$\neg(2)$: "$\forall$" diventa "$\exists$", "$\exists$" diventa "$\forall$"

$\neg$"Tutti i politici sono corrotti." $\Longleftrightarrow$ "Esiste (almeno) un politico che non è corrotto."

$\neg$"$\forall x \in$ Politici: x è corrotto." $\Longleftrightarrow$ "$\exists x \in$ politici: x non è corrotto".

$\neg(2)$: $\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x$ con $|x-x_0|<\delta: |f(x)-\ell| \geq \varepsilon$.

Allora, un $\varepsilon>0$ di questo tipo esiste.

Lo chiamiamo ε_0.

Scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Esiste x con $|x-x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x)-\ell| \geq \varepsilon_0$.

Chiamiamo x trovato così: x_n.

Vuol dire: abbiamo trovato una successione x_n

con $x_n \longrightarrow x_0$ ma $f(x_n) \not\longrightarrow \ell$.

Oppure: $\exists x_n \to x_0: f(x_n) \not\to \ell$.

Questo è esattamente $\neg(1)$:

$\neg(1) = \neg(\forall x_n \to x_0: f(x_n) \to \ell)$

$= \exists x_n \to x_0: f(x_n) \not\to \ell$.

(4)

$\boxed{\text{Esempi:}}$ di limiti importanti:

- Funzione esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

In particolare: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

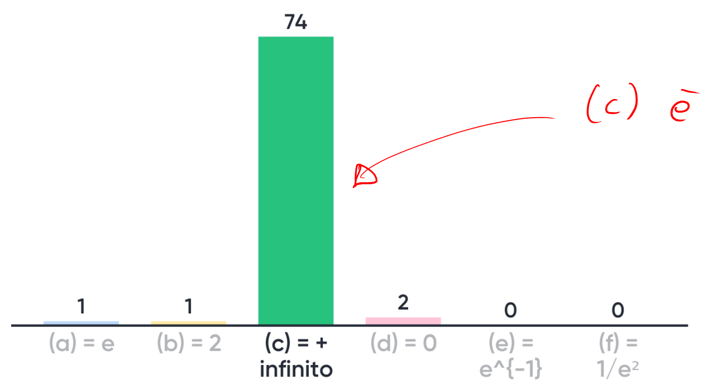
- per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

$\lim_{x\to0} x^n = 0$.

Qual è il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}\ ?$$

(a)	$= e$	(b)	$= 2$	(c)	$= +\infty$
(d)	$= 0$	(e)	$= e^{-1}$	(f)	$= \frac{1}{e^2}$



(c) è giusto.

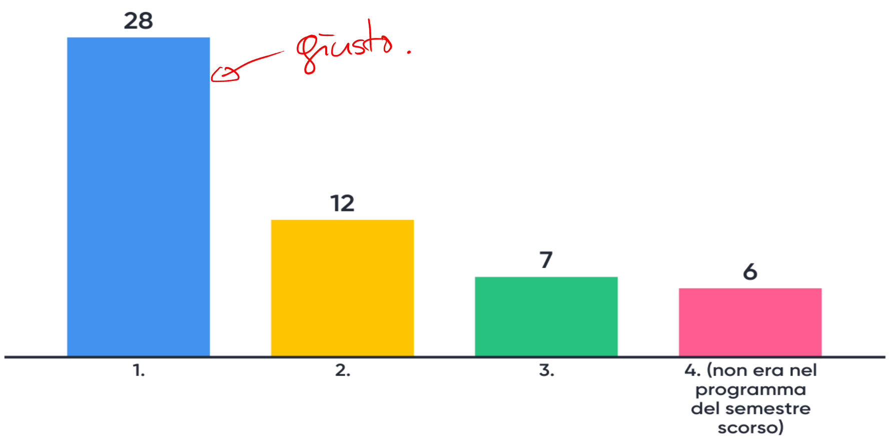
Bravo!

5

Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Il **criterio del rapporto (per le successioni)** è come segue:

1. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora $a_n \to 0$.
2. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora $a_n \to b$.
3. Se la successione b_n converge a zero, allora a_n tende ad un limite $a < 1$.
4. Non era nel programma del semestre scorso.



$\boxed{\text{La successione } \frac{e^n}{n^2} \to +\infty.}$ (Limite di una successione.)

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Definiamo $a_n := \frac{n^2}{e^n}$.

Idea: invece di dimostrare $\frac{e^n}{n^2} \to +\infty$, dimostriamo $a_n \to 0$ usando il criterio del rapporto.

Allora $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}\right)}{\left(\frac{n^2}{e^n}\right)} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^2}$

$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n} e} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$

Criterio del rapporto $\Rightarrow a_n \to 0$. ■

6

$\boxed{\text{Dimostrazione di } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \longrightarrow +\infty;}$ (Limite di una funzione)

Sia $M > 0$.

Abbiamo già dimostrato: $\frac{e^n}{n^2} \longrightarrow +\infty$.

Allora $\exists N \in \mathbb{N}$ con $\frac{e^N}{N^2} > M$.

Abbiamo anche: $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{e^N}{N^2}$ per $x > N$. $(*)$

Perché?

Scriviamo $x = N + \underbrace{(x - N)}_{=: \tilde{x}}$

Ovviamente $x > N \Longrightarrow \tilde{x} > 0$.

$(*)$ si può scrivere come:

$$\frac{e^{\tilde{x}+N}}{(\tilde{x}+N)^2} \geq \frac{e^N}{N^2}$$

$$\| $$

$$\frac{e^{\tilde{x}} e^N}{(\tilde{x}+N)^2}$$

$| : e^N$

$| \cdot (\tilde{x}+N)^2$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{e^{\tilde{x}}}_{>1 \text{ per ogni } \tilde{x} > 0} \geq \frac{(\tilde{x}+N)^2}{N^2} = \left(\frac{\tilde{x}+N}{N}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{\tilde{x}}{N}+1\right)^2}_{\to 1 \ (N \to \infty)}.$$

Per N grande $e^{\tilde{x}} > \left(\frac{\tilde{x}}{N}+1\right)^2$.

$$\Rightarrow \frac{e^x}{x^2} \geq \frac{e^N}{N^2} > M \quad \text{per ogni } x > N.$$

■

Altri limiti importanti:

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Teorema: (Operazioni con i limiti di funzioni)

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente dei due limiti, se non sono indeterminate (non sono "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$").

Dimostrazione: applicare il teorema analogo per successioni. ■

Esempi: (1) per $x \to +\infty$:

$$\frac{e^x}{x^2} \qquad e^x \to +\infty, \quad x^2 \to +\infty$$

(2) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ per $x \to 0$: $1-\cos(x) \to 0$, $x^2 \to 0$. Così non si può decidere!

Soluzione: $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$

$$= \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\to 1} \frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} \longrightarrow 1^2 \, \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Teorema: Siano $g: X \to Y$ e $f: Y \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che: $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y\to y_0} f(y) = \ell$, ed esista un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$. Allora anche $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell$.

Dimostrazione: esercizio — anche nel libro, ma è importante di provare da solo e solo guardare nel libro se non riuscite per alcuni giorni! Se avete trovato la dimostrazione da solo, controllate nel libro! ■

- Prossima lezione: martedì 10:30 (orario normale), zoom.
- Esercizi da risolvere prima, martedì discutiamo la soluzione.

Esercizi e riassunti: su Ariel e anche su www.nielsbenedikter.de -> Teaching

Domande? niels.benedikter@unimi.it

Grazie!

1

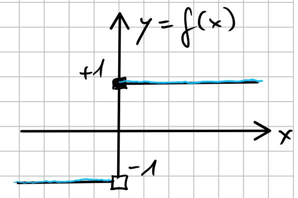
Funzioni continue:

Consideriamo funzioni f definite in un dominio A, con A unione finita di intervalli.

Idea centrale: "Una funzione continua è una funzione che si può disegnare senza staccare la penna dal foglio, oppure: una funzione che non salta".

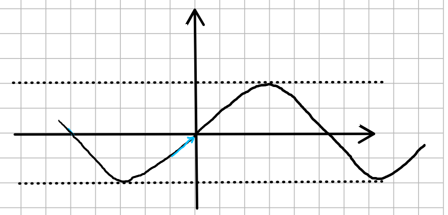
Esempio: (1) $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

non è continua!



(2) $g(x) = \operatorname{sen}(x)$

Questa è una funzione continua.

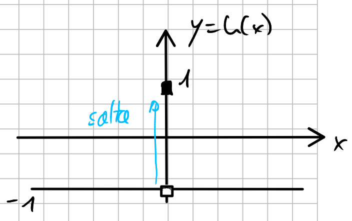


(3) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0-} h(x) = -1 = \lim_{x\to 0+} h(x)$

$= \lim_{x\to 0} h(x).$

$\lim_{x\to 0} h(x) = -1 \neq 1 = h(0).$



La funzione $h(x)$ non è continua!

Definizione: Una funzione f è continua in un punto x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

abbiamo bisogno di $x_0 \in A$

⚠ Attenzione: Continuità è un concetto solo definito per punti x_0 nel dominio A.

2

Definizione: Una funzione è continua in un intervallo (a,b) se è continua in ogni punto x_0 con $a < x_0 < b$.

Esempio: La funzione $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

è continua su tutto il dominio, ma il dominio è solo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Teorema: La somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Il quoziente di funzioni continue è una funzione continua in punti con un intorno tale che il denominatore non si annulla lì.

Dimostrazione: Sia f una funzione continua, sia g una funzione continua. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$= f(x_0) + g(x_0).$$

■

Esempi:

(1) $\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x) = 1$, $g(x) = x$

Il teorema dice: $\frac{1}{x}$ è continua per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) $\frac{x}{x} = \frac{g(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) = x$

Il teorema dice: $\frac{x}{x}$ è continua se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ma è ottimale: $\frac{x}{x} = 1$, ovviamente ha una estensione continua nel punto 0 (lo vedremo dopo).

(3)

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0,\end{cases}\qquad \frac{1}{f(x)}=\begin{cases}\text{non è definita} & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0.\end{cases}$$

Non esiste un intorno $(-\delta_1, \delta_2)$ di $x=0$ con $f(x)\neq 0$.
Allora il teorema non dice niente su $\frac{1}{f(x)}$.

Teorema: Se $g: X \longrightarrow Y$ è continua in x_0
e $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $y_0 := g(x_0)$,
allora anche $f(g(x))$ è continua in x_0.

Dimostrazione: $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$
$= f(g(x_0))$. $\blacksquare$

Esempi: Le funzioni $f(x) = \dots$
... potenze x^b, esponenziale a^x,
logaritmi $\log_a(x)$, funzioni trigonometriche
$\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\text{tg}(x)$, e valore assoluto $|x|$
sono funzioni continue.

Dimostrazione per $\text{sen}(x)$:

Il dominio del sen è $A=\mathbb{R}$. Allora dobbiamo dimostrare continuità in ogni punto $x_0\in\mathbb{R}$.
Sia $x_0\in\mathbb{R}$. Continuità significa: $\lim_{x\to x_0}\text{sen}(x) = \text{sen}(x_0)$.

Equivalentemente: $\lim_{h\to 0}\text{sen}(x_0+h) = \text{sen}(x_0)$.

Usando una formula di addizione per sen:

$$\lim_{h\to 0}\text{sen}(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left(\text{sen}(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\,\text{sen}(h)\right)$$
$$= \text{sen}(x_0)\underbrace{\lim_{h\to 0}\cos(h)}_{=1} + \cos(x_0)\underbrace{\lim_{h\to 0}\text{sen}(h)}_{=0}$$

$= \text{sen}(x_0)$. $\blacksquare$

La funzione $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ con dominio $A = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$:

Dimostrazione per $\text{tg}(x)$: Si usa il teorema per il quoziente. $\blacksquare$

Continuità è utile per calcolare limiti

Esempio: Sia $b>0$. Calcoliamo $\lim_{x\to 0+}(1+bx)^{\frac{1}{x}}$:
Poniamo $y := \frac{1}{bx}$. $\quad \frac{1}{x} = by$

Allora $x\to 0+$ implica $y\longrightarrow +\infty$.
Allora

$$\lim_{x\to 0+}(1+bx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{by}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^b = \Big(\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\text{limite notevole: } =e}\Big)^b = e^b.$$

continuità di $f(x)=x^b$ usata per portare limite dentro la potenza

Continuità:
"$\lim_{x\to x_0}(x^b) = (\lim_{x\to x_0} x)^b = x_0^b$."
"$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0)$".

Esempio: Qual è il $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x}$?

$$\frac{\log(x)}{x} = \frac{1}{x}\log(x) = \log(x^{\frac{1}{x}}) = \log(\sqrt[x]{x}).$$

Usando continuità del log:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\log(\sqrt[x]{x})$$
$$= \log\Big(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}}_{=1}\Big) = \log(1) = 0.$$

Estensione continua (o prolungamento continuo)

Consideriamo adesso una funzione con dominio A a cui "manca un punto":

Esempio: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. $\quad A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

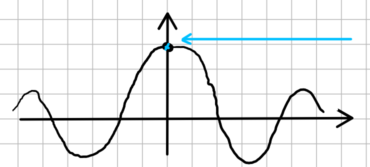
Abbiamo già visto: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Se poniamo $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

otteniamo una funzione continua:

$$\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = \tilde{f}(0).$$

Abbiamo trovato una estensione continua di f.



Definizione: Sia f una funzione definita su un intervallo mancando un punto,

$A = (a, b) \setminus \{x_0\} \qquad a < x_0 < b$
$= (a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Se esiste una funzione continua $\tilde{f}$ con $\tilde{f}(x) = f(x)\ \forall x \in A$ chiamiamo $\tilde{f}$ una estensione continua di f, o un prolungamento continuo di f.

Si dice anche: la funzione f presenta una singolarità eliminabile nel punto x_0.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Esiste una funzione continua $\tilde{f}$ con $f(x) = \tilde{f}(x)$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

In altre parole: esiste un numero $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \ell & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua?

La risposta è no! Sempre:

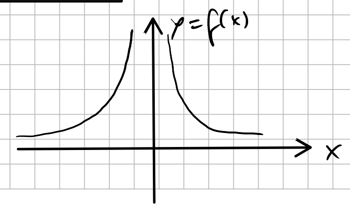
$\lim_{x \to 0^-} \tilde{f}(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \tilde{f}(x) = +1.$

Allora $\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x)$ non può essere $= \ell$, perché non esiste.

Definizione: Sia x_0 nel dominio di f.

- f presenta una discontinuità di prima specie se limite destro e limite sinistro esistono ma
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$
- f presenta una discontinuità di seconda specie se almeno uno dei limiti
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
non esiste o è infinito.

Esempi: (1) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ se $x \neq 0$.



Esiste un prolungamento continuo nel punto 0?

Non esiste!

(7)

Perchè per ogni $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ \ell \in \mathbb{R} & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = +\infty \neq \ell$ perchè $+\infty \notin \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Menti:}}$

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x+2)}.$$

Un prolungamento continuo esiste nei punti:

(1) $x = -1$ e $x = -2$ (2) nessun punto

$\boxed{(3) \text{ solo in } x = -1}$ (4) solo in $x = -2$

Soluzione

Perchè?

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

In $x_0 = -1$: $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x \to -1}(x-1)}{\lim_{x \to -1}(-1+2)}$

$$= \frac{-2}{1} = -2.$$

Poniamo $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq -1 \\ -2 & \text{per } x = -1 \end{cases}$ e abbiamo

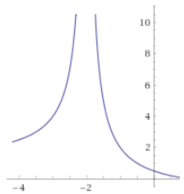
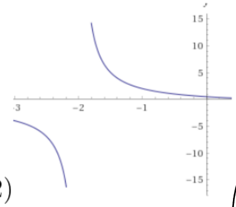
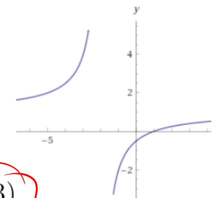
trovato un prolungamento continuo nel $x_0 = -1$.

In $x_0 = -2$: $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+2}$ $\quad x-1 \to -3, \quad x+2 \to 0$

Diverge ad $\pm\infty$, allora un prolungamento continuo non esiste.

(8)

La funzione $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$: qual'è?

(1)  (2)  (3) 

Soluzione

Perchè? Vicino a $x_0 = -2$: $x - 1 \approx -3$, si può pensare

di $\frac{x-1}{x+2} = \frac{-3}{x+2}$. La funzione cambia segno

se andiamo da $x < -2$ a $x > -2$ $\Rightarrow$ (1) non è possibile.

Per $x > -2$: $x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{-3}{x+2} > 0 \Rightarrow$ (2) non è possibile.

Così l'argomento non è una dimostrazione, ma è anche importante avere un'idea del comportamento di funzioni senza fare molti conti.

circa

Trova i valori di $a \in \mathbb{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a}$$

ha una estensione continua su tutti i numeri reali $\mathbb{R}$.

Soluzione:

$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a}$ Dov'è $= 0$?

dobbiamo cancellare $x-a$ per non avere limite $\pm\infty$ al punto $x_0 = a$.

$x^2 - 5x + 6 \stackrel{!}{=} 0$

$x_1 = \frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = 3$

$x_2 = \frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = 2.$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$

Allora $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-2)}{x-a}$.

Perchè non esiste una estensione continua per esempio per $a=1$?
Perchè con $a=1$, il limite nel punto $x_0 = 1$ non esiste!

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-3)(x-2)}{x-1} = +\infty.$$ La funzione diverge ad $+\infty$.

Perchè esiste una estensione continua per $a=2$?

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2} (x-3) = \underline{\underline{-1}}.$$

Se poniamo $\tilde{f}(2) = -1$ abbiamo trovato una estensione continua.

$\Rightarrow$ Soluzione: Un prolungamento continuo su tutto $\mathbb{R}$ esiste solo per $a=2$ e per $a=3$.

Soluzione Esercizi 1 (di 11 marzo 2020)

Problema 1:

(1) $\forall x_n \to x_0$ con $x_n \in A\setminus\{x_0\}$: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$

(2) $\forall M>0\ \exists \delta>0$: $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x) > M$.

Dimostrazione: "$(2) \Rightarrow (1)$":

Sia x_n una successione con $x_n \to x_0$, e $x_n \in A\setminus\{x_0\}$.

Dobbiamo usare (2) per dimostrare: $f(x_n) \longrightarrow +\infty$.

Cosa significa $f(x_n) \to +\infty$?

$\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\ n>N \Rightarrow f(x_n) > M$.

Usiamo (2) come segue:

Sia $M>0$. $\exists\ \delta>0$ tale che: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

Ma siccome $x_n \to x_0$:

$\exists N\in\mathbb{N}$ con: $n>N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$.

Abbiamo dimostrato: $n>N \Rightarrow f(x_n) > M$.

"$(1) \Rightarrow (2)$" è la stessa cosa come $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$.

(en.wikipedia.org/wiki/Contraposition)

(2): $\forall M>0\ \exists\delta>0$: $\forall x$ con $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$: $f(x) > M$.

$\neg(2)$: $\exists M>0\ \forall\delta>0$ $\exists x$ con $|x-x_0|<\delta$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$: $f(x) \le M$.

Un M di questo tipo esiste. Lo chiamiamo M_0.

Per $n\in\mathbb{N}$ scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$:

$\neg(2)$ dice: per $\delta = \frac{1}{n}$ esiste un x con $|x-x_0| < \frac{1}{n}$ e $x\in A\setminus\{x_0\}$ tale che: $f(x) \le M_0$.

Lo chiamiamo x_n.

Allora abbiamo costruito una successione x_n con $f(x_n) \le M_0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$: $f(x_n) \not\longrightarrow +\infty$.

Abbiamo dimostrato: "$\exists x_n \to x_0$ con $x_n \in A\setminus\{x_0\}$: $f(x_n) \not\to +\infty$."

Questo è esattamente $\neg(1)$.

Problema 2: $g: X \to Y$ e $f: Y \to \mathbb{R}$

con $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$,

ed esiste un intorno $I \ni x_0$ tale che: $g(x) \neq x_0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Allora: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell$.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare: $\forall x_n \to x_0 : f(g(x_n)) \to \ell$.

Sia x_n una successione con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$.

$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ significa: $g(x_n) \longrightarrow y_0$.

Esiste $I = (a,b)$ con $a < x_0 < b$.

Siccome $x_n \to x_0$ esiste un $N \in \mathbb{N}$: $n > N \Rightarrow x_n \in I$.

Come detto: per $n > N$: $g(x_n) \neq y_0$.

Allora, la successione $y_n := g(x_n)$ soddisfa le assunzioni del limite $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$: $y_n \to y_0$ e $y_n \neq y_0$.

Allora $f(g(x_n)) = f(y_n) \longrightarrow \ell$. $\blacksquare$

Problema 3:

a Il limite di $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$ non esiste.

Soluzione:

$x_n := \frac{1}{2\pi n}$

abbiamo: $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$

e $f(x_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi n}\right)}\right) = \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$

$\tilde{x}_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$: $\tilde{x}_n \neq 0$, $x_n \to 0$

e $f(\tilde{x}_n) = \operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$.

Allora: $f(x_n) \longrightarrow 0$, $f(\tilde{x}_n) \to 1$.

b $f(x) = |x| \operatorname{sen}(x)$ non ha un limite per $x \to +\infty$.

Soluzione: $x_n := 2\pi n$: $f(x_n) = |2\pi n| \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi n)}_{=0} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\tilde{x}_n := 2\pi n + \frac{\pi}{2}$: $f(\tilde{x}_n) = \left|2\pi n + \frac{\pi}{2}\right| \underbrace{\operatorname{sen}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}_{= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

$x_n \longrightarrow +\infty$

$\tilde{x}_n \longrightarrow +\infty$

$= 2\pi n + \frac{\pi}{2} \longrightarrow +\infty$.

c Sia $a > 0$. Il limite $\lim_{x \to a} \sqrt{x}$ esiste? Usa ε e δ.

Soluzione: Indovinare: $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = \ell$.

$$|\sqrt{a} - \sqrt{x}| = |\sqrt{a} - \sqrt{x}| \frac{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}$$

(trucco importante)

$$= |(\sqrt{a} - \sqrt{x})(\sqrt{a} + \sqrt{x})| \frac{1}{|\sqrt{a} + \sqrt{x}|}$$

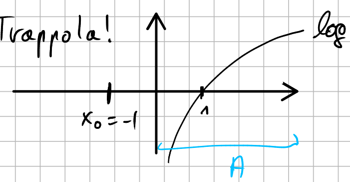
$$= |a - x| \frac{1}{\sqrt{a} + \underbrace{\sqrt{x}}_{\geq 0}} \leq |a - x| \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta := \sqrt{a}\,\varepsilon$. Allora:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{x}| \leq |a - x| \frac{1}{\sqrt{a}} < \cancel{\sqrt{a}}\,\varepsilon \frac{1}{\cancel{\sqrt{a}}} = \varepsilon$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt{x}| < \varepsilon.$$ $\blacksquare$

d Trappola!



Il punto -1 non è nel dominio $A = (0, \infty)$ e non è un estremo del dominio. Non si può chiedere per il limite!

e $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = ?$

$$\frac{\lim_{x \to 0} 1 - \cos x}{\lim_{x \to 0} x} \quad \frac{= 0}{= 0}$$ non definito!

Soluzione:

Un tipo di esercizio molto importante!

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

$$= \frac{1-\cos^2(x)}{x\,(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x\,(1+\cos(x))}$$

teorema per limite del prodotto/somma/quoziente

$$= \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{\to 0}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}} \longrightarrow 1\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

per $x \to 0$

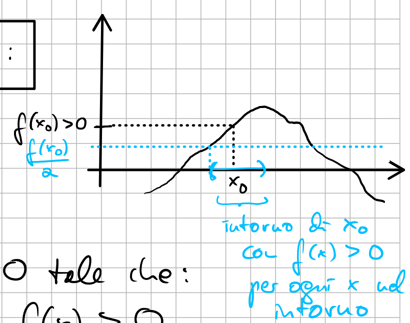
Risultato: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$

LEZIONE

Teoremi sulle funzioni continue:

Teorema della permanenza del segno:

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0.
Se $f(x_0)>0$ esiste un $\delta>0$ tale che:
$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta):\ f(x)>0.$$



Dimostrazione: Continuità significa:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > 0.$$

Usando ε e δ: Scegliamo $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$.

Allora esiste $\delta>0$ con

$$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

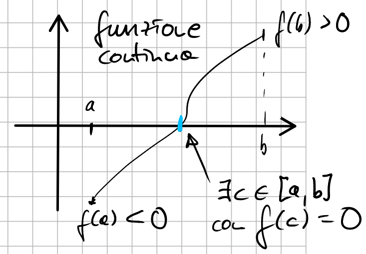
Per $f(x)\geq f(x_0)$: $f(x)\geq f(x_0)>0$ è banale.
Allora studiamo $f(x)<f(x_0)$:

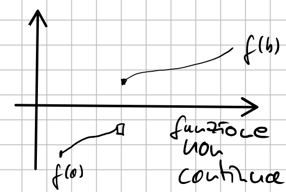
$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a>0 \\ -a & \text{se } a<0 \end{cases}$

$$|f(x)-f(x_0)| = f(x_0)-f(x)$$
$$f(x_0)-f(x) < \frac{f(x_0)}{2} \qquad |+f(x)$$
$$f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}+f(x) \qquad |-\frac{f(x_0)}{2}$$
$$\underbrace{\frac{f(x_0)}{2}}_{>0} < f(x).$$

Teorema dell'esistenza degli zeri:

Sia f una funzione continua in un intervallo $[a,b]$.
Se $f(a)<0$ e $f(b)>0$, allora esiste $c\in(a,b)$ tale che $f(c)=0$.





Dimostrazione:

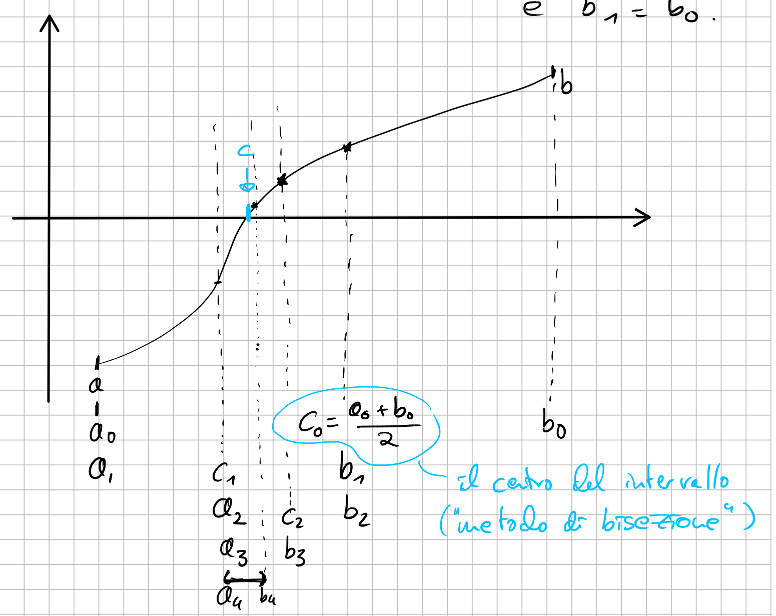
Idea: Costruire una successione convergente ad un punto che si verifichi essere lo zero della funzione data.
Usiamo "il metodo di bisezione".

Poniamo $a_0 := a$, $b_0 := b$, e $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$.

Se $f(c_0) = 0$ allora non c'è più niente da dimostrare.

Se invece $f(c_0) > 0$: poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$.

Al contrario, se $f(c_0) < 0$: poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$.



Adesso ripetiamo la costruzione:

Al generico passo k: poniamo $c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$.

Se $f(c_k) = 0$: non c'è più niente da dimostrare

Se $f(c_k) > 0$: poniamo $a_{k+1} := a_k$ e $b_{k+1} = c_k$. "intervallo sinistro"

Se $f(c_k) < 0$: poniamo $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$. "intervallo destro".

Così abbiamo costruito induttivamente tre successioni: a_n, b_n, e c_n.

Si vede: a_n è non-decrescente.

b_n è non-crescente.

E abbiamo anche: $a_0 \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq b_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

In particolare: $a_n \leq b_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \geq a_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi per il teorema delle successioni monotone:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ esistono e sono finiti. $(*)$

Si nota anche:

$b_n - a_n =$ Ci sono due possibilità

$b_{n-1} - c_{n-1} = b_{n-1} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$

$c_{n-1} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - a_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$.

$\Rightarrow b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$

$\Rightarrow b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Quindi $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 0$

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$ (perché abbiamo dimostrato che i limiti esistono in $(*)$)

Cioè: $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Adesso si può applicare il teorema dei carabinieri con $a_n \leq c_n \leq b_n$:

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

Scriviamo c per il limite comune.

La continuità di f assicura che:

$$f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Per la costruzione abbiamo: $f(a_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(b_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Se combiniamo:

$$f(c) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{<0} \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

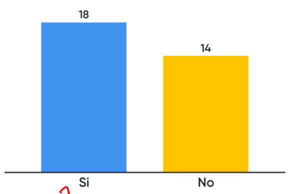
$$\Rightarrow f(c) = 0.$$

Allora c è il numero che abbiamo cercato. $\blacksquare$

Esercizio interessante: programmare l'algoritmo della dimostrazione in C/Java/Python... provatelo.

$\boxed{\text{Menti}}$ $f(x) = x^7 + x - 1$. Esiste una soluzione per $f(x) = 0$? Si.

Si può anche usare altri punti, non devono essere $x=0$ e $x=1$.



giusto

Dimostrazione: $f(0) = -1 < 0$

$f(1) = +1 > 0.$

La funzione è continua (perché è una somma/differenza di funzioni continue).

Usiamo il teorema:

$\exists c \in (0,1)$ con $f(c) = 0.$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $g(x) = e^x + x = 0$: esiste una soluzione?

Soluzione: $g(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0, \quad g(0) = 1 > 0.$

Quindi esiste un $c \in (-1,0)$ con $g(c) = 0.$

Il teorema era molto utile qui perché una formula analitica per la soluzione non esiste.

Si può solo usare l'algoritmo per approssimare c.

Si trova: $c \approx -0{,}567143...$

Soluzione Esercizio II

Problema 1: $\boxed{\text{Dimostrazione:}}$

Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$.

Dobbiamo dimostrare:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)]\ \exists x_0 \in [a,b]:\ f(x_0) = y_0.$$

Sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$.

Se $y_0 = f(a)$: una soluzione è $x_0 = a$.

Se $y_0 = f(b)$: basta prendere $x_0 = b$.

Se $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione

$$g(x) := f(x) - y_0.$$

$y_0 > f(a)$ implica:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$

$f(b) > y_0$ implica:

$$g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $g(x_0) = 0$.

Cioè $f(x_0) = y_0$. $\blacksquare$

Problema 2:

$\boxed{a}$ Soluzione: Seconda specie significa:

$\lim_{x\to x_0^-} f(x_0)$ o $\lim_{x\to x_0^+} f(x_0)$ non esiste o è $\pm\infty$.

Per esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 42 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
$\Rightarrow$ seconda specie

oppure

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^-} g(x)$ non esiste.
$\Rightarrow$ seconda specie

Altro esempio:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$
(oppure $\lim_{x\to 0^-} h(x) = +\infty$)
$\Rightarrow$ seconda specie

Oppure:

$$i(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{\cos(x)} & \text{se } x > 0 \\ 5 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} i(x) = 5$$

$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ Si può usare il teorema sul limite del quoziente.

$$\lim_{x\to 0^+} i(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ La discontinuità è di seconda specie.

$\boxed{b}$ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{\operatorname{sen}(x-1)}$. In tutti i punti x con $\operatorname{sen}(x-1) \neq 0$ si può usare il teorema su continuità del quoziente.

$\Rightarrow$ I punti da studiare sono solo i punti dove $\operatorname{sen}(x-1) = 0$:

$$x_0 \in \{1, 1+\pi, 1+2\pi, 1+3\pi, \dots\}$$

Per ogni x_0 in questo insieme: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ può esistere solo se $\lim_{x\to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = 0$.

(In punti dove $\lim_{x\to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = a \neq 0$ il teorema sul limite del quoziente dice: $\lim_{x\to x_0^-} \frac{(2x^2-6x+4)}{\operatorname{sen}(x-1)} \text{ "}=\frac{a}{0}\text{" } = +\infty$ oppure $-\infty$.
Se limite sinistro è infinito, non esiste un prolungamento continuo.)

Per la continuità di $2x^2 - 6x + 4$:

$$\lim_{x\to x_0} (2x^2 - 6x + 4) = 2x_0^2 - 6x_0 + 4.$$

Soluzioni di $2x_0^2 - 6x_0 + 4 = 0$: $x_0 \in \{1, 2\}$.

Infatti $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Allora $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$.

③

Per $x_0 = 1+\pi$: $\lim_{x\to 1+\pi} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)}$

$2(x-1)(x-2) \longrightarrow 2\pi(\pi-2) > 0.$

$\operatorname{sen}(x-1) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to(1+\pi)-} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = -\infty, \quad \lim_{x\to(1+\pi)+} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = +\infty.$

$\Rightarrow$ Non esiste un prolungamento continuo in $x_0 = 1+\pi$.

La stessa cosa per $x_0 \in \{1+2\pi, 1+3\pi, 1+4\pi \dots\}$.

Per $x_0 = 1$:

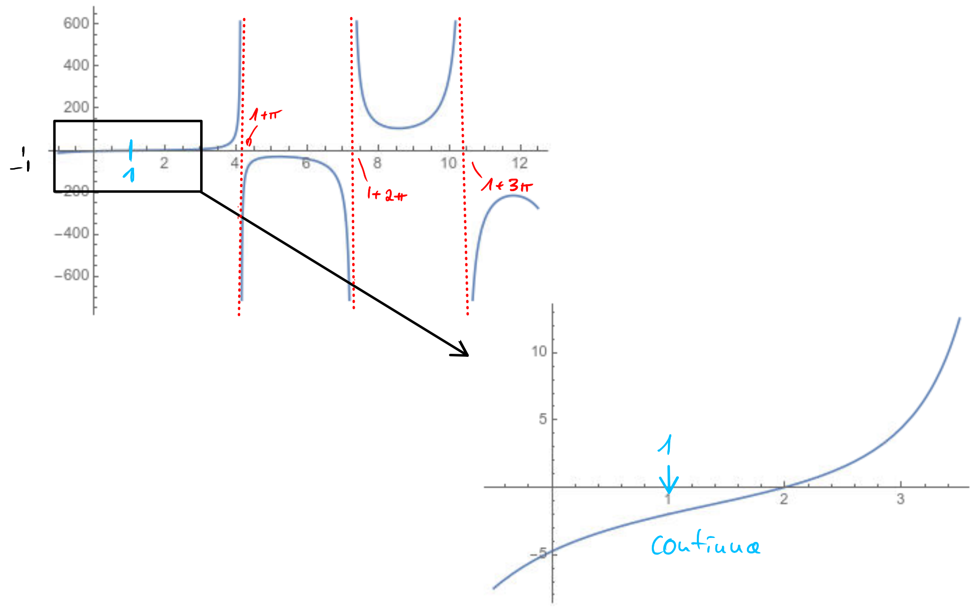
$$\lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x-2)}{\operatorname{sen}(x-1)} = 2 \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)}}_{=1} \underbrace{\lim_{x\to 1}(x-2)}_{=-1} = -2.$$

(per continuità di $x-2$)

teorema sul quoziente

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

La funzione ha un prolungamento continuo nel punto $x_0 = 1$.



④

$\boxed{c}$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

La funzione è ovviamente continua per ogni $x_0 \neq 0$.

Il punto $x_0 = 0$:

$\lim_{x\to 0-} f(x) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (ax^2 + bx + c)$

$= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$

Per avere una funzione continua dobbiamo avere

$0 = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = c$

$\Rightarrow$ Per $c = 0$ la funzione è continua.

Per a e b sono permesso tutti numeri reali.

$\boxed{d}$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$?

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} \overset{?}{=} \frac{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}{\lim_{x\to+\infty}(x-1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$ non è definito così!

Invece:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})}{\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{1 + \overbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}^{=0}}{1 - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}_{=0}} = \frac{1}{1} \text{ è definito } (=1).$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 1$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \frac{1}{x}}{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^2})}$$

$= \frac{0}{1} = 0$ è definito.

LEZIONE (5)

Teorema di Weierstrass:

Sia f una funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a,b]$, che vuol dire: esistono in $[a,b]$ punti x_{min} e x_{max} tali che

$$f(x_{min}) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

e

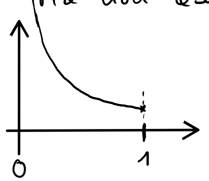
$$f(x_{max}) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Definizione: Si chiama x_{min} un punto di minimo e x_{max} un punto di massimo. Si chiama $m := f(x_{min})$ il minimo e $M := f(x_{max})$ il massimo di f in $[a,b]$.

Esempi: L'intervallo deve esser chiuso I:

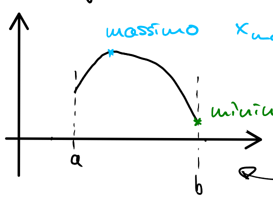
$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $(0,1]$ è continua. non chiuso!

Ma non assume massimo!



Non è limitata superiormente vicino ad $x=0$.

Una funzione con massimo e minimo:

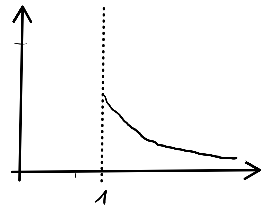


sul intervallo chiuso $[a,b]$.

(6)

L'intervallo deve essere chiuso II:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $[1,+\infty)$



f assume un massimo (nel punto $x_{max} = 1$)

ma non assume un minimo!

È limitata inferiormente da $y=0$ ma non esiste nessun punto x_{min} con $f(x_{min}) = 0$.

(L'estremo inferiore esiste ed è zero: $\inf\{f(x) : x \in [1,+\infty)\} = 0$.)

L'intervallo deve essere chiuso III:

$f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $[1,2]$ assume il massimo in $x_{max} = 1$ e il minimo in $x_{min} = 2$.

La funzione deve essere continua:

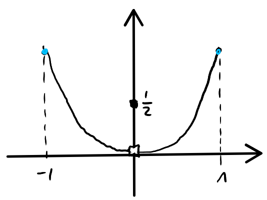
$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$ ← Attenzione!

con dominio $[-1,1]$ non è continua in $x_0 = 0$.

La funzione assume il massimo in

$x_{max,1} = -1$ e $x_{max,2} = 1$.

La funzione non assume il minimo!



Si avvicina ad $y=0$ se $x \to 0$ ma non esiste nessun punto x_{min} con $f(x_{min}) = 0$.

del teorema di Weierstrass

Dimostrazione: Poniamo $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ che può essere anche $+\infty$.

(L'estremo superiore esiste sempre se permettiamo $+\infty$.)

Costruiamo una successione x_n con $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. La costruzione è come segue:

(1) Se $M = +\infty$: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$ (usando la definizione di estremo superiore). Cioè $f(x_n) \to +\infty$ per $n \to \infty$.

(2) Se $M \in \mathbb{R}$: Usiamo la definizione di estremo superiore: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \le M$.

Allora $f(x_n) \longrightarrow M$. Qui abbiamo usato: l'intervallo è limitato.

Abbiamo $a \le x_n \le b$, allora la successione è limitata.

Se vediamo una successione limitata: "sempre" si usa il teorema di Bolzano-Weierstrass!

dal primo semestre

teorema di Bolzano-Weierstrass: Sia x_n una successione limitata. Allora esiste una successione estratta x_{n_k} che converge.

$\Rightarrow$ esiste una successione estratta $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ per un punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_{n_k} \in [a,b]$ implica $x_0 \in [a,b]$.

Qui abbiamo usato: l'intervallo è chiuso.

(Se $x_{n_k} \in (a,b)$ possiamo dire solo $x_0 \in [a,b]$ chiuso ma non possiamo dire $x_0 \in (a,b)$. Esattamente per questo il teorema non si applica per $f(x) = \frac{1}{x}$ su $(0,1]$.)

Abbiamo trovato una successione x_{n_k} tale che: $x_{n_k} \longrightarrow x_0$ e $x_0 \in [a,b]$ e $f(x_{n_k}) \longrightarrow M$.

Adesso usiamo continuità:

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0).$$

Allora abbiamo costruito un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = M$.

"$+\infty$" non è un valore permesso per una funzione!

$\Rightarrow f(x_0) < +\infty \Rightarrow M < +\infty$. ■

Seconda formulazione del teorema dell'esistenza dei valori intermedi:

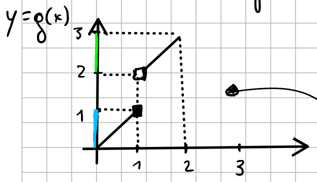
Una funzione continua in un intervallo chiuso assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

Dimostrazione: Combinazione della prima formulazione e il teorema di Weierstrass. ■

Teorema (Criterio di invertibilità)

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

⚠ Una funzione strettamente monotona è sempre invertibile.
La cosa importante: $f: [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$
e $f^{-1}: [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$.



$g: [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup (2,3] \neq [0,3]$.

Dimostrazione: Caso in cui f è strettamente crescente:
$$f(a) < f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (a,b).$$
Quindi $f(a)$ è il minimo, $f(b)$ il massimo.
Teorema precedente: f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Cioè: $\forall y \in [f(a), f(b)] \; \exists x \in [a,b] : f(x) = y$.
Tale x è unico: infatti non è possibile avere due valori distinti $x_1 < x_2$ con $f(x_1) = y = f(x_2)$ perché f strettamente crescente significa: $f(x_1) < f(x_2)$. ■

Teorema (sul limite delle funzioni monotone)

Sia f una funzione monotona in $[a,b]$. Allora esistono (e sono finiti) i limiti destri e sinistri:
$$\lim_{x \to a+} f(x), \quad \lim_{x \to b-} f(x), \quad \boxed{\lim_{x \to x_0+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) \quad \text{per ogni } x_0 \in (a,b).}$$

⚠ L'ipotesi sono solo "f monotona".
In altre parole: una funzione monotona può avere le discontinuità di prima specie (salti) ma non di seconda specie.

Dimostrazione: Consideriamo il caso di una funzione crescente.

Allora $f(a)$ è il minimo e $f(b)$ il massimo.
Sia $x_0 \in (a,b]$. Poniamo
$$\ell := \sup\{ f(x) : x \in [a, x_0) \}.$$
Ovviamente $\ell < f(b)$, allora ℓ è finito.
Usiamo il metodo di ε e δ per dimostrare che ℓ è il limite sinistro in x_0.
Sia $\varepsilon > 0$.
Per la proprietà dell'estremo superiore esiste un $\tilde{x}_0 \in [a, x_0)$ tale che: $\ell - \varepsilon < f(\tilde{x}_0)$

Poniamo $\delta := x_0 - \tilde{x}_0$.
Così otteniamo:
$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies x \in (\tilde{x}_0, x_0).$$
Siccome f è crescente:
$$x \in (\tilde{x}_0, x_0) \implies \underset{\ell - \varepsilon}{\underset{\vee}{f(\tilde{x}_0)}} \leq f(x) \leq \underset{\ell}{\underset{\shortparallel\!\wedge}{f(x_0)}}$$

Abbiamo ottenuto:
$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \implies f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell).$$
Questo è esattamente l'esistenza del limite sinistro. ■

Teorema di continuità delle funzioni inverse:

Sia f una funzione strettamente monotona in $[a,b]$.
Se f è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

Esempio: Se sappiamo solo continuità della funzione

$$f(x) = e^x, \quad f: (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, +\infty)$$

per il teorema otteniamo continuità del logaritmo

$$f^{-1}(x) = \ln(x), \quad f^{-1}: (0,\infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$

Dimostrazione: Il teorema "criterio di invertibilità" implica (per il caso di f crescente):

$f: [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ ed esiste
$f^{-1}: [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$.

In particolare: f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$.
Anche f^{-1} è una funzione strettamente monotona. Controllare!
Il teorema precedente $\Rightarrow$ se f^{-1} ha una discontinuità, è di prima specie ("un salto").

Ma un salto non è possibile perché f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$.

——— La fine del capitolo su continuità. ———

Derivate

Esempio: Una macchina che percorre una strada. Indichiamo con $s(t)$ la distanza percorsa in funzione del tempo t.

Tasso medio di accrescimento di s da un certo istante t ad un altro $t+h$:

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$s(t+h) = 200\,km$
$s(t) = 0\,km$
$h = 2$ ore

$$\frac{200\,km - 0\,km}{2\text{ ore}} = 100\,\frac{km}{h}.$$

In parole più comuni, questo è la velocità media nell'intervallo $[t, t+h]$.

Cos'è la velocità instantanea?

$$v(t) := \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \quad \Big\}\ \text{tasso di accrescimento instantaneo}$$

Come calcolare questa velocità?
Se pensiamo di s continua: $\lim_{h\to 0} \big(s(t+h) - s(t)\big) = 0$.

è una espressione di tipo "$\frac{0}{0}$"!

Ma per "funzione buone" si può, per esempio: $s(t) = t^2$.

$$v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{t^2} + 2th + h^2 - \cancel{t^2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2t\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (2t + h) = 2t.$$

La velocità al tempo t è: $v(t) = 2t$.

Definizione: Sia f una funzione definita nell'intervallo (a,b), e sia $x \in (a,b)$.

Si dice che f è <u>derivabile</u> nel punto x se esiste (ed è finito) il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tale limite si chiama la <u>derivata di f in x</u>.

Notazione: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$, o $Df(x)$.

f è <u>derivabile nell'intervallo aperto (a,b)</u> se è derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$.

Esempi: <u>La funzione costante:</u> $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a-a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0. \quad (*)$$

$\Rightarrow f'(x) = 0.$

<u>La funzione lineare:</u>

$f(x) = mx$ con $m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h)-mx}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{mx}+mh-\cancel{mx}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{m\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} m = m.$$

$\Rightarrow f'(x) = m.$

<u>Indefinita:</u> $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ con $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Problema cruciale: "Quale funzione tende ad zero più velocemente, f o g?"

<u>Invece</u> in $(*)$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0.$$

$\frac{0}{x} = 0$

<u>La funzione $f(x) = |x|$:</u>

È derivabile per $x \neq 0$, ma non in $x = 0$.

Infatti:
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Ma $\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$,

e $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$.

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ non esiste.

$\Rightarrow$ La funzione f <u>non</u> è derivabile in $x = 0$, $f'(0)$ non esiste.

⚠ f è continua ma non è derivabile.

Teorema Ogni funzione derivabile in x è anche continua in x.

Dimostrazione: Sia f derivabile in x.

Allora $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste $(= f'(x) \in \mathbb{R})$.

Ma adesso

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x) + f(x+h) - f(x) \right)$$
$$= f(x) + \lim_{h \to 0} \left(f(x+h) - f(x) \right)$$
$$= f(x) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot h$$
$$= f(x) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$$
$$= f(x) + f'(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} h}_{=0} = f(x).$$

■

Definizione: Se f è derivabile in (a,b) allora la sua derivata f' è una funzione in (a,b).
Se la funzione f' è a sua volta derivabile, diremo che la sua derivata $(f')'$ è la derivata seconda di f.

Notazione: f'', $\frac{d^2 f}{dx^2}$, o $D^2 f$

Esempio: La macchina. Abbiamo già visto:
se la distanza è $s(t) = t^2$, la velocità al tempo t è $v(t) = s'(t) = 2t$.
La derivata seconda è il tasso di accrescimento della velocità (oppure l'accelerazione):

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 2.$$

Teorema: Operazioni con le derivate

Se f e g sono due funzioni derivabili in x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto, e il quoziente se il denominatore è diverso da zero.

Si ha le regole:

$$(f+g)' = f'+g' \quad e \quad (f-g)' = f'-g'.$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{se } g \neq 0!)$$

Dimostrazione: per $(f+g)' = f'+g'$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

per $(fg)' = f'g + fg'$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\underbrace{f(x+h)g(x+h) \overbrace{- f(x)g(x+h)}^{\text{inserito lo zero}}}\underbrace{\overbrace{+ f(x)g(x+h)} - f(x)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))\,g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{=f'(x)}\ \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{\substack{=g(x) \\ \text{(una funzione derivabile} \\ \text{è anche continua!)}}} + f(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{=g'(x)}$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

per il quoziente: dopo. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ Un'altra dimostrazione per $s(t)=t^2$ ha derivata $s'(t) = 2t$.

$$s'(t) = (t^2)' = (t\cdot t)' = \underbrace{t'}_{=1}\cdot t + t\cdot \underbrace{t'}_{=1}$$
$$= t + t = 2t.$$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = \operatorname{sen}(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$$ formula di addizione

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

$$= \operatorname{sen}(x) \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}}_{=1} \cos(x)$$

(→ capitolo sui limiti)

$$= \cos(x). \qquad \Rightarrow \quad \underline{D\operatorname{sen}(x) = \cos(x)}.$$

$g(x) = x\operatorname{sen}(x)$:

$$Dg(x) = (Dx)\cdot\operatorname{sen}(x) + x\, D\operatorname{sen}(x)$$
$$= 1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$$
$$= \operatorname{sen}(x) + x\cos(x).$$

Soluzione Esercizio III

Problema 1: $\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ punti principali a lezione (settimana scorsa), adesso i dettagli:

Criterio di invertibilità $\Rightarrow f^{-1}$ esiste e va da $[f(a), f(b)]$ a $[a,b]$.

In particolare: f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$.

f strettamente crescente significa: $\forall x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$.

Usiamo un argomento per contraddizione per dimostrare che anche f^{-1} è strett. crescente:

Sia $y_1 < y_2$. Assumiamo $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Siccome f è crescente: $\Rightarrow \underbrace{f(f^{-1}(y_1))}_{= y_1} \geq \underbrace{f(f^{-1}(y_2))}_{= y_2}$.

Allora, per contraddizione, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Siccome f^{-1} è strett. crescente, può avere solo le discontinuità di prima specie: salti. Ma è veramente possibile? Vediamo!

Cos'è esattamente un salto? È un punto y_0 tale che:
$$\lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y) \neq \lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y).$$

Per successioni sappiamo (capitolo sui teoremi di confronto, semestre scorso):

(*) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, e $a_n \geq b_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, allora $a \geq b$.

Per qualsiasi successione $y_n \to y_0$, $y_n < y_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = \lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y).$$

Per qualsiasi successione $\tilde{y}_n \to y_0$, $\tilde{y}_n > y_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(\tilde{y}_n) = \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y).$$

Siccome f^{-1} è strett. crescente: $f^{-1}(y_n) \le f^{-1}(\tilde{y}_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \overset{\text{usato } (*)}{\le} \lim_{n\to\infty} f^{-1}(\tilde{y}_n)$$

$$\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y) \qquad\qquad \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y).$$

Se abbiamo "$=$", non è un salto.

Allora pensiamo a $\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y) < \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y)$.

Come visto nella dimostrazione del teorema sul limite delle funzioni monotone:

$$\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y) = \sup\{f^{-1}(y) : y < y_0\}$$

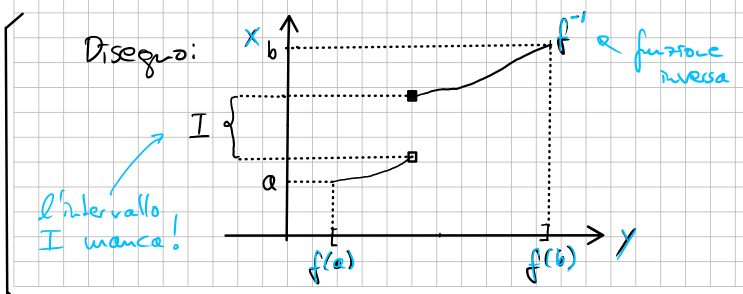
$$\lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y) = \inf\{f^{-1}(y) : y > y_0\}.$$

Allora la funzione f^{-1} non assume i valori nel intervallo $I = [\lim_{y\to y_0-} f^{-1}(y), \lim_{y\to y_0+} f^{-1}(y)]$. Ma non è possibile perché abbiamo già visto che

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$$

assume tutti i valori in $[a,b]$, non può mancare l'intervallo $I \subset [a,b]$. $\blacksquare$

Disegno:



Problema 2:

a) $f(x) = x^3$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Continuità: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Oppure: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x$ con $|x - x_0| < \delta : \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Sia $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}|x^3 - x_0^3| &= |x^3 - x_0^2 x + x_0^2 x - x_0^3| \\ &= |x|\,|x^2 - x_0^2| + x_0^2 |x - x_0| \\ &= |x|\,|x - x_0|\,|x + x_0| + x_0^2 |x - x_0| \\ &= |x - x_0| \left(|x|\,|x + x_0| + x_0^2\right) \\ &\le |x - x_0| \left(|x|^2 + |x|\,|x_0| + x_0^2\right).\end{aligned}$$

Se $|x - x_0| < \delta$ e $\delta < |x_0|$ otteniamo: $|x| < 2|x_0|$

$$\Rightarrow \underbrace{|x^3 - x_0^3|}_{\text{vogliamo ottenere: } < \varepsilon} \le \underbrace{|x - x_0|}_{<\delta,\ \delta \text{ suffic. piccolo}} \underbrace{(4x_0^2 + 2x_0^2 + x_0^2)}_{= 7x_0^2}$$

$|x - x_0| < \delta$

(1) $x > x_0$: $x - x_0 < \delta$, $x < x_0 + \delta < 2|x_0|$

(2) $x_0 > x$: $x_0 - x < \delta$

tutte le possibilità ... $x > 0, x < 0, x_0 > 0, x_0 < 0$ ...

Poniamo $\delta := \min\left\{|x_0|, \frac{\varepsilon}{7x_0^2}\right\}$.

allora: $|x^3 - x_0^3| < \frac{\varepsilon}{\cancel{7x_0^2}} \cancel{7x_0^2} = \varepsilon$. $\blacksquare$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \ne 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

definiti su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Sia $x_n \longrightarrow 0$, $x_n \ne 0$.

Allora $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x)$ esiste ed è $= 0$.

- Sia $x_n \to 0$ con $x_n \neq 0$.

Allora $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

Con $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \in [-1,1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$-x_n \leq x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq x_n .$$

Teorema dei carabinieri: $\lim_{n\to\infty} x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

- $f(g(x_n)) = f\left(x_n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$

Cercare $x_n \longrightarrow 0$.

Per esempio: $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}(2\pi n) = 0$.

$\Rightarrow f(g(x_n)) = f(0) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$ non è possibile.

Teoremi:

(1) Se g, f sono continue, allora $f(g(x))$ è continua.

La funzione f non è continua!

(2) Sia $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y\to y_0} f(y) = \ell$, ed esiste un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, allora $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell$.

invece l'esempio qui:

$\boxed{g(x_n) = 0 \quad (= y_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Non applica perché un intorno di questo tipo non esiste.

Problema 3: Se f è pari, la derivata f' è dispari.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ Sia f pari, $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

La derivata è: $f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$

$f(-x+h) = f(-(x-h)) = f(x-h)$

$\overset{f \text{ è pari}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \overset{\tilde{h}=-h}{=} \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{-\tilde{h}}$

$= -\lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(x+\tilde{h}) - f(x)}{\tilde{h}} = -f'(x)$.

Problema 4:

a) La funzione $f(x) = x|x|$ ammette per $x=0$ la derivata prima, ma non la seconda.

Soluzione:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}|h| - 0|0|}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} |h| = 0 .$$

Il limite esiste e $f'(0) = 0$.

Derivata seconda: $\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - \underbrace{f'(0)}_{=0}}{h}$ (✱)

Per $h>0$: $f(h) = h|h| = h^2 \Rightarrow f'(h) = D h^2 = 2h$.

Per $h<0$: $f(h) = -h^2 \Rightarrow f'(h) = -2h$.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f'(h) - \overbrace{f'(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{2h}{h} = 2 .$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2 .$$

$\Rightarrow$ Il limite (✱) non esiste.

b) Derivata di $f(x) := \frac{1}{x}$.

Prima:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\cancel{h}}{x(x+h)\cancel{h}} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{1}{\lim_{h\to 0} x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Seconda:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{(x+h)^2} + \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 (x+h)^2}\right) = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2xh - h^2}{x^2 (x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{x^2(x+h)^2} = \frac{\lim_{h\to 0}(2x+h)}{\lim_{h\to 0} x^2(x+h)^2} = \frac{2x}{x^4} = 2\frac{1}{x^3}.$$

c) $g(x) = (\text{sen}(x))^2 + x^2$.

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\text{sen}(x)\,\text{sen}(x)\right) + \frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{d\,\text{sen}(x)}{dx}\cdot \text{sen}(x) + \text{sen}(x)\frac{d\,\text{sen}(x)}{dx} + 2x$$

$$= \cos(x)\,\text{sen}(x) + \text{sen}(x)\cos(x) + 2x$$

$$= 2\left(\cos(x)\,\text{sen}(x) + x\right).$$

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,2\left(\cos(x)\,\text{sen}(x) + x\right) \qquad \text{regola per il prodotto}$$

$$= 2\,\frac{d\cos(x)}{dx}\,\text{sen}(x) + 2\cos(x)\underbrace{\frac{d\,\text{sen}(x)}{dx}}_{=\cos(x)} + 2$$

formula di addizione + limite del rapporto incrementale $\Rightarrow \dfrac{d\cos(x)}{dx} = -\,\text{sen}(x)$ } come fatto a lezione per $\dfrac{d\,\text{sen}(x)}{dx}$.

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = 2\left(-\text{sen}(x)\right)\text{sen}(x) + 2\cos^2(x) + 2$$

$$= 2\left(-\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) + 1\right) \qquad \boxed{\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

$$= 4\cos^2(x).$$

$-\text{sen}^2(x) = \cos^2(x) - 1$

LEZIONE

Teorema: (derivata delle funzioni composte)

Se g è una funzione derivabile in x, e f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x e

$$D(f(g(x))) = (Df)(g(x))\,Dg(x) = f'(\underline{g(x)})\,g'(x)$$

$$= \frac{df}{dg}(\underline{g(x)})\,\frac{dg}{dx}(\underline{x}).$$

f' nel punto $g(x)$

Esempi: $f(x) = \text{sen}(x^2) = g(h(x))$

se poniamo $g(x) = \text{sen}(x)$, $h(x) = x^2$.

Teorema $\Rightarrow f'(x) = g'(h(x))\,h'(x)$.

$g'(x) = \cos(x)$, $h'(x) = 2x$.

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\underline{h(x)})\cdot 2x = \cos(x^2)\cdot 2x.$$

Dimostrazione (parziale):

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Già visto: g derivabile in $x \Rightarrow g$ continua in x

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} g(x+h) - g(x) = 0.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\;\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x) + (g(x+h) - g(x))) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{\underbrace{g(x+h) - g(x)}_{=:\tilde h}\to 0} \frac{f(g(x) + \tilde h) - f(g(x))}{\tilde h}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x))\cdot g'(x).$$

(La dimostrazione è valida se $g(x+h) \neq g(x)$ per tutti valori di $h \neq 0$ in un intorno di zero.)

! $g(x+h) - g(x) = 0$

Soluzione di questo problema: Libro p. 126.

Dimostrazione di $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$:

Esercizio III: per $k(x) = \frac{1}{x}$: $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Identità: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,k(g(x))$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\, k(g(x)) + f(x)\, D(k(g(x)))$$
$$= f'(x)\, k(g(x)) + f(x)\, k'(g(x))\, g'(x)$$

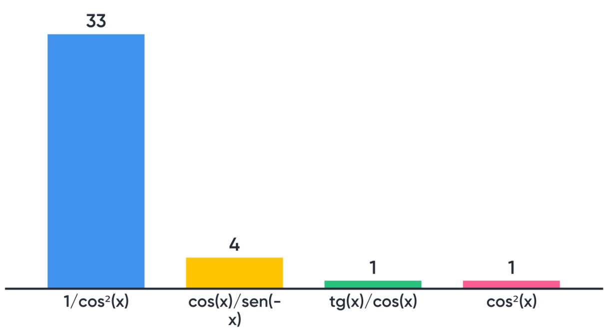
Ci ricordiamo: $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$, allora $k'(g(x)) = -\frac{1}{g(x)^2}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \underbrace{k(g(x))}_{=\frac{1}{g(x)}} + f(x)\left(-\frac{1}{g(x)^2}\right) g'(x)$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x)}{g(x)\, g(x)} - \frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}.$$

MENTI

La derivata di tg(x) = sen(x)/cos(x) è



Soluzione: $D\,tg(x) = D\,\frac{sen(x)}{cos(x)}$ regola per il quoziente

$$= \frac{(D\,sen(x))\cos(x) - sen(x)(D\cos(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x) - sen(x)(-sen(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

Ci ricordiamo: Una funzione strettamente crescente

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ed è invertibile. Se f è anche continua, la funzione inversa f^{-1} è definita su $[f(a), f(b)]$.

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Sia f strettamente crescente (o decrescente) in $[a,b]$. Se f è derivabile in $x \in (a,b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$, e

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

⚠

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $y = f(x) = x^2$ è continua e strettamente crescente per $x > 0$.

La funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Abbiamo già visto $f'(x) = 2x$.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow D\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

1

Derivate delle funzioni elementari

Già visto: $Dx^2 = 2x$, $Dx = 1$, $D\,\mathrm{sen}(x) = \cos(x)$,
$D\cos(x) = -\mathrm{sen}(x)$.

In generale: $Dx^n = n x^{n-1}$ per $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dimostrazione: Usiamo induzione.

<u>n=1</u>: Abbiamo già verificato: $Dx = 1$. (*)

Supponiamo che $Dx^n = n x^{n-1}$. (**)

<u>Da n a n+1</u>: Dobbiamo dimostrare: $Dx^{n+1} = (n+1)x^n$.

Per la regola del prodotto:

$$Dx^{n+1} = D(x^n x) = \underbrace{(Dx^n)}_{\text{qui usiamo (**)}} x + x^n \underbrace{(Dx)}_{\text{qui usiamo (*)}}$$

$$= (n x^{n-1})x + x^n 1 = (n+1)x^n. \qquad \blacksquare$$

Domanda: Qual'è la derivata di $\mathrm{sen}^2(x)$?

$$D\,\mathrm{sen}^2(x) = D(\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(x)) \underset{\text{regola per il prodotto}}{=} (D\,\mathrm{sen}(x))\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)(D\,\mathrm{sen}(x))$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(x)\cos(x).$$

$$D\,\mathrm{sen}^2(x) = Df(g(x)) \underset{\text{regola per la funzione composta}}{=} (Df)(g(x))\,\underline{Dg(x)}$$

con $f(x) = x^2$, $g(x) = \mathrm{sen}(x)$; $f'(x) = 2x$

non dimenticarse!

$$= 2\,\mathrm{sen}(x) \cdot \underline{\cos(x)}$$

$D\ln(x) = \frac{1}{x}$ (logaritmo con base e = logaritmo naturale):

Dimostrazione: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \underset{\text{continuità del logaritmo}}{=} \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \underset{\text{limite notevole}}{=} \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}\underbrace{\ln(e)}_{=1} = \frac{1}{x}. \qquad \blacksquare$$

2

La derivata più importante in tutta la matematica:

$$De^x = e^x.$$

Dimostrazione: $f(x) = e^x$ è la funzione inversa del $\ln$:
Allora con $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$:

$$De^y \underset{\text{regola per la funzione inversa}}{=} \frac{1}{D\ln(x)} = \frac{1}{1/x} = x = e^y. \qquad \blacksquare$$

$Da^x = a^x \ln(a)$, per $a > 0$:

Dimostrazione:

$$Da^x = D e^{\ln(a^x)} = D e^{x\ln(a)}$$

$$\underset{\text{regola per le funzioni composte}}{=} e^{x\ln(a)} D(x\ln(a)) = \underbrace{e^{x\ln(a)}}_{=a^x} \ln(a) \qquad \blacksquare$$

$Dx^b = b x^{b-1}$ anche per tutti $b \in \mathbb{R}$:

Dimostrazione:

$$Dx^b = D\left(e^{\ln(x^b)}\right) = D e^{b\ln(x)} = e^{b\ln(x)} D(b\ln(x))$$

$$= x^b\left(b\frac{1}{x}\right) = b x^{b-1}. \qquad \blacksquare$$

Questo contiene: $Dx^n = n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
$D\frac{1}{x} = D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$.

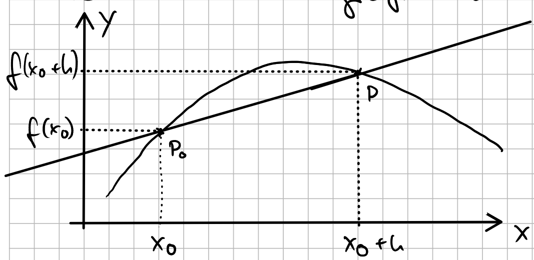
Da ricordarsi:

$f(x) =$	$x^b, b \in \mathbb{R}$	$\ln(x)$	e^x	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$	$tg(x)$
$f'(x) =$	$b x^{b-1}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos(x)$	$-\mathrm{sen}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

(3)

Significato geometrico della derivata:

Consideriamo il grafico di una funzione f, per esempio:



Una retta secante il grafico nei punti
$P_0 = (x_0, f(x_0))$
$P = (x_0+h, f(x_0+h))$

Una generica retta: $y = mx + q$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$.

Per determinare m, q:

(1) passaggio per P_0: $f(x_0) = mx_0 + q$

(2) " per P: $f(x_0+h) = m(x_0+h) + q$

Seconda meno prima equazione: "(2) − (1)"

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \cancel{mx_0} + mh + \cancel{q} - \cancel{mx_0} - \cancel{q}$$

$$\Rightarrow m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$: il rapporto incrementale.

Inserire m nella prima equazione, (1):

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0 + q$$

$$\Rightarrow q = f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0$$

Risultato: la retta secante è

$$y = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{m} x + \underbrace{\left(f(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} x_0 \right)}_{q}$$

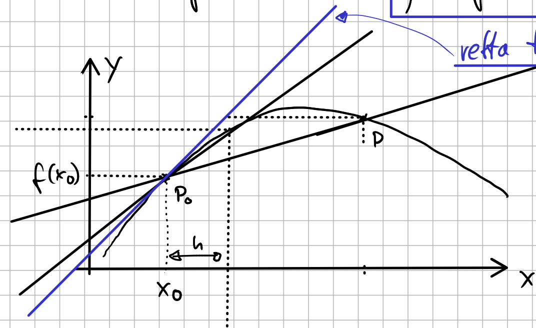
o equivalentemente:

$$y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) + f(x_0).$$

(4)

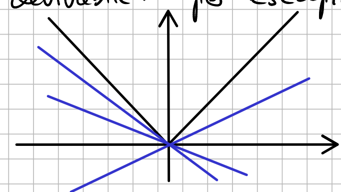
Per $h \to 0$ e f derivabile: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

retta tangente



Pendenza della retta tangente:
$f'(x_0)$

Se f non è derivabile: per esempio $f(x) = |x|$, nel $x_0 = 0$:



Non è definita una (unica) tangente.

Applicazione: per approssimare una funzione:

1) Vediamo una bici in strada al tempo t_0 e sappiamo solo $s(t_0)$, $v(t_0)$:

$s(t_0) = 10\,km$ distanza

$v(t_0) = s'(t_0) = 24\,\frac{km}{h}$ velocità

Probabilmente dopo altri dieci minuti la distanza sarà:

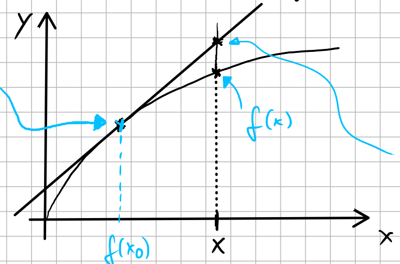
$$10\,km + \left(\frac{1}{6}h\right) \frac{24\,km}{h} = 14\,km.$$

$$s(t_0) + (t - t_0)\, s'(t_0) \approx s(t)$$ ← È la formula per la retta tangente!

L'approssimazione è meglio se conosciamo anche l'accelerazione $s''(t_0)$: Formula di Taylor (la vediamo tra 1-2 settimane).

2) Per calcolare $\sqrt{x}$, per esempio $\sqrt{2}$: $f(x) := \sqrt{x}$.

Supponiamo che conosciamo $f(x_0)$ e $f'(x_0)$, e vogliamo trovare $f(x)$ per $x \neq x_0$ (e non molto lontano da x_0).



l'approssimazione per $f(x)$: la retta tangente:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}$$

Cominciamo con un trucco: $\sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200}$.

Il quadrato più vicino a 200 è: $196 = 14^2$.

Poniamo $x_0 = 196$, $x = 200$:

$$\underbrace{\sqrt{200}}_{\text{la funzione}} \underbrace{\approx}_{\text{approssimazione}} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\sqrt{x_0}}_{\text{la retta tangente}} = \frac{1}{2\cdot 14}(200-196)+14$$

$$= \frac{1}{7} + 14 = 14.1428\ldots$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{10}\sqrt{200} \approx \frac{1}{10}\,14.1428\ldots = 1.41428\ldots$$

(Valore essatto: $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$)

— Fine del capitolo —

Non rilevante per l'esame:

Un gioco: Sia $a \in \mathbb{N}$

Definiamo la funzione: $f(a) = \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{se } a \text{ è pari} \\ 3a+1 & \text{se } a \text{ è dispari} \end{cases}$

Iterazione: $a, f(a), f(f(a)), \ldots$

Esempio: $a=13, f(a)=40, f(f(a))=20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1\ldots$

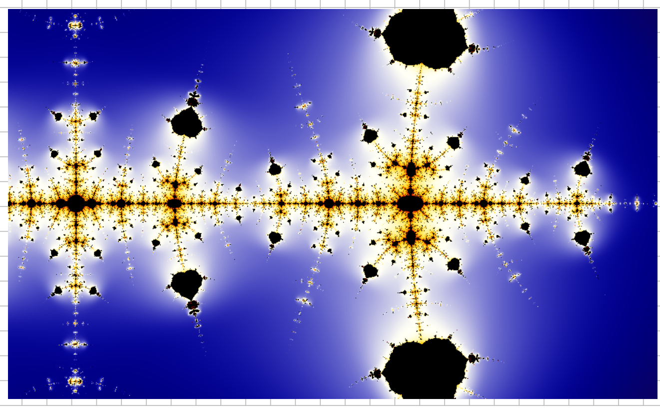
Una successione diversa per ogni numero iniziale $a \in \mathbb{N}$.

Nessuno sa se arriviamo sempre nel loop $4 \mapsto 2 \mapsto 1$!

Controllato col computer: vero per ogni $a \leq 87 \cdot 2^{60}$.

In generale rimane un problema aperto.

Ma esiste una connessione col frattale seguente, usando numeri complessi:



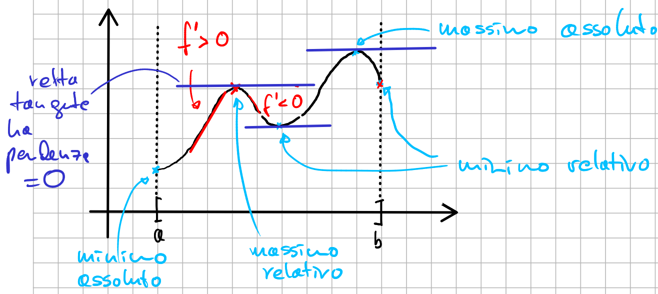
Ne parliamo un po' di più un altro giorno...

— fine del gioco —

Studio di funzioni: (rilevante per l'esame ☺)

Massimi e minimi relativi

Cos'è un massimo relativo?



Definizione: Sia f definita in $[a,b]$. Un punto $x_0 \in [a,b]$ è di massimo relativo per f nell'intervallo $[a,b]$, se esiste un $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b] \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Un punto $x_0 \in [a,b]$ è di massimo assoluto per f nell' $[a,b]$ se:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Un massimo assoluto è anche un massimo relativo!

Nel massimo relativo, la retta tangente ha pendenza = 0.

Teorema di Fermat: Sia f una funzione definita in $[a,b]$, e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo. Se $\underbrace{x_0 \in (a,b)}_{\text{importante!}}$ e f è derivabile in x_0, risulta:

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazione: Consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo relativo. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h \in (-\delta, \delta).$$

Per $h > 0$: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

Per $h < 0$: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$,

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$.

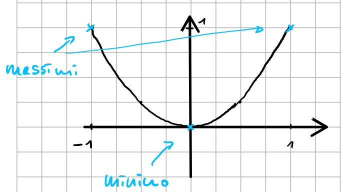
Ma f è derivabile $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ esiste.

Se il limite esiste, abbiamo sempre: limite destro uguale limite sinistro.

L'unica possibilità è: $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 0 = f'(x_0)$.

Esempio: $f(x) = x^2$ con dominio $[-1,1]$.



Ha un minimo (assoluto e relativo) in $x = 0$.

La derivata è: $f'(x) = 2x$.

$f'(0) = 0$. ✓

Abbiamo anche due massimi: nel $x = -1$ e $x = 1$.

$f'(-1) = -2$, $f'(1) = 2$. ← Possibile perché $-1 \notin (-1,1)$, $1 \notin (-1,1)$.

$f'(x) = 2x \neq 0$ per ogni $x \neq 0 \Rightarrow$ non è possibile avere altri massimi o minimi relativi nell' $(-1,1)$.

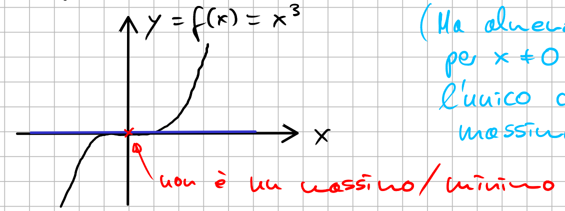
Conclusione: Per trovare i minimi e massimi relativi, basta controllare i punti x con $f'(x) = 0$ e anche gli estremi dell' intervallo.

⚠ **Attenzione:** $f'(x) = 0$ non implica che x è un punto di massimo o minimo.

Per esempio: $f(x) = x^3$ con dominio $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ può essere un max/min.

Ma se controlliamo il grafico: Ovviamente $x = 0$ non è un punto di massimo o minimo relativo.



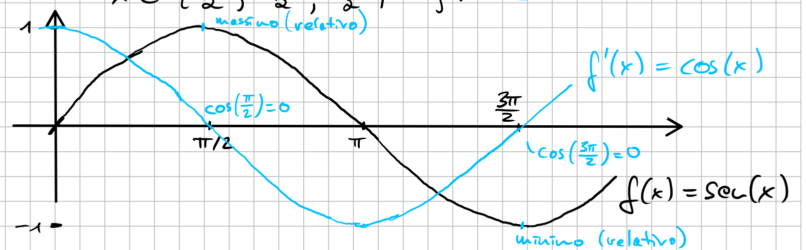
(Ma almeno sappiamo $f'(x) \neq 0$ per $x \neq 0$, allora $x = 0$ era l'unico candidato per un massimo o minimo.)

Esempio: Dove sono i massimi e minimi relativi della funzione $f(x) = \sin(x)$?

Derivata: $f'(x) = \cos(x)$.

Punti possibili: x con $\cos(x) = 0$

$x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$.



Teorema di Rolle: Sia f una funzione continua in $[a,b]$, è derivabile in (a,b).

Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Settimana prossima.

①

Soluzione Esercizio IV

Problema 1: $\boxed{a}$ Derivata di $\log_a(x)$:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

In generale: Se c è un numero fisso $D(cf) = c\,Df$.

- $D(cf)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\,Df(x)$
- $D(cf) = \underbrace{(Dc)}_{=0} f + c\,Df = c\,Df$.

$$\Rightarrow D\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} D\ln(x) = \frac{1}{\ln(a)\,x}.$$

$\boxed{b}$ $f(x) = \ln(\operatorname{sen}(x^2)) = f_1(f_2(f_3(x)))$

con $f_1(x) = \ln(x)$ $\quad f_1'(x) = \frac{1}{x}$

$f_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ $\quad f_2'(x) = \cos(x)$

$f_3(x) = x^2$ $\quad f_3'(x) = 2x$

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot D(f_2(f_3(x)))$$
$$= f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \cos(x^2)\, 2x = \frac{\cos(x^2)\,2x}{\operatorname{sen}(x^2)}.$$

quoziente

$$f''(x) = \frac{D(\cos(x^2)2x)\operatorname{sen}(x^2) - \cos(x^2)2x\, D(\operatorname{sen}(x^2))}{(\operatorname{sen}(x^2))^2}$$

prodotto composta

$$= \frac{D(\cos(x^2))\cdot 2x \operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)2\operatorname{sen}(x^2) - \cos(x^2)2x\cos(x^2)\cdot 2x}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x\cdot 2x\operatorname{sen}(x^2) + \cos(x^2)2\operatorname{sen}(x^2) - \cos^2(x^2)4x^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$

$$= \underbrace{\frac{-4x^2 + 2\cos(x^2)\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}}_{\text{risultato ottimo}} = \frac{-4x^2 + \operatorname{sen}(2x^2)}{\operatorname{sen}^2(x^2)}$$

②

$$g(x) = e^{-x^2} = g_1(g_2(x)) \qquad g_1(x) = e^x \quad g_1'(x) = e^x$$
$$g_2(x) = -x^2 \quad g_2'(x) = -2x.$$

funzione composta:

$$Dg(x) = (Dg_1)(g_2(x))\,Dg_2(x) = e^{-x^2}(-2x).$$

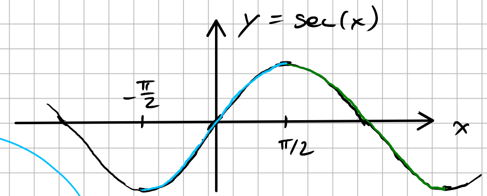
prodotto

$$D^2g(x) = D(e^{-x^2}(-2x)) = (De^{-x^2})(-2x) + e^{-x^2}D(-2x)$$
$$= e^{-x^2}(-2x)^2 + e^{-x^2}(-2)$$
$$= e^{-x^2}(4x^2-2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

$h(x) = x\ln(x)$ regola per il prodotto

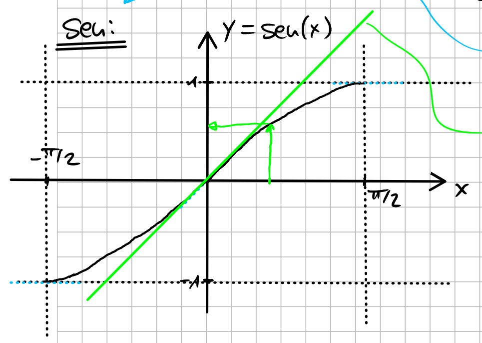
$$Dh(x) = D(x)\ln(x) + x\,D\ln(x)$$
$$= \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1.$$
$$D^2h(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Problema 2:



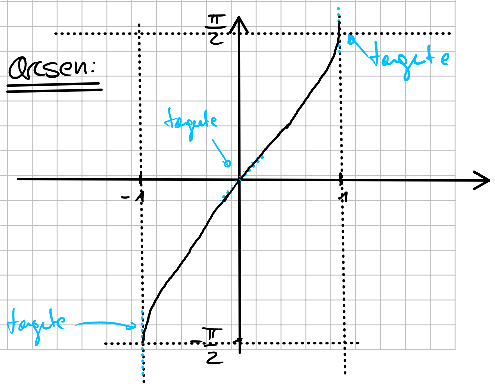
qui è monotona

Sen:

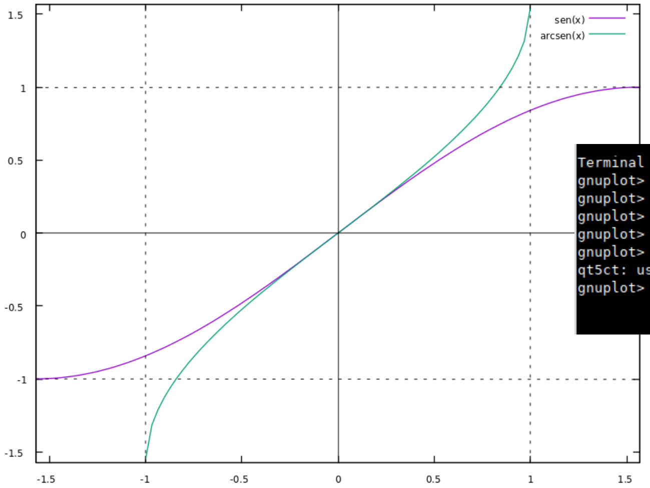


funzione inversa: riflessione alla retta con pendenza = 1.

Arcsen:



(3)




```
Terminal type is now 'qt'
gnuplot> set xrange [-pi/2:pi/2]
gnuplot> set yrange [-pi/2:pi/2]
gnuplot> f(x) = sin(x)
gnuplot> g(x) = x > -1 && x < 1 ? asin(x) : 1/0
gnuplot> plot f(x), g(x)
qt5ct: using qt5ct plugin
gnuplot>
```

$\boxed{b}$ $y = \operatorname{sen}(x) = f(x) \qquad x = \operatorname{arcsen}(y) = f^{-1}(y)$

$$D\operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{D\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(y))}$$

ci ricordiamo $\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1 \Rightarrow \cos = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2}$

$$D\operatorname{arcsen}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

In modo analogo: $D\arccos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$D\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Problema 3: $f(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + 1.25x^2 - 7x + \pi$

nell'intervallo $[-5,3]$.

Sempre: estremi dell'intervallo sono candidati: $x=-5$ e $x=3$.

Oltre: candidati nell'interno $(-5,3)$?

Nell'interno possiamo usare il teorema di Fermat.

(4)

La derivata è:

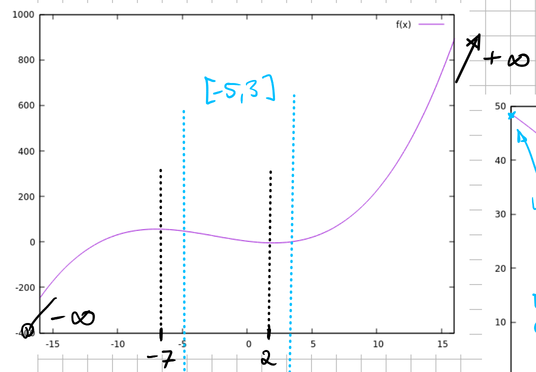
$$f'(x) = \frac{1}{6}3x^2 + 2.5x - 7$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7 = \frac{1}{2}(x^2+5x-14).$$

Dov'è $x^2+5x-14 = 0$?

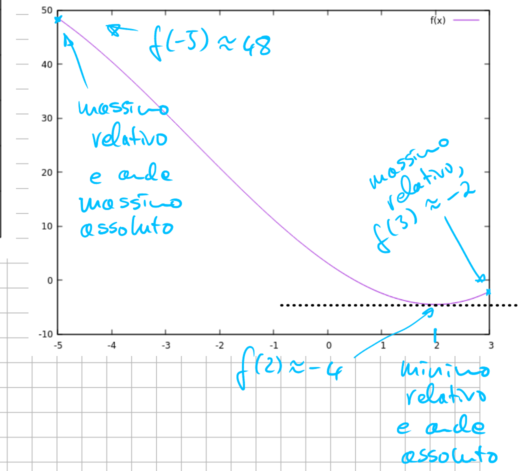
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot(-14)}}{2} = \begin{cases} -7 \\ 2 \end{cases}$$

$-7 \notin [-5,3]$, allora uno è un candidato.

$\Rightarrow$ Candidati: $\{-5, 2, 3\}$.



solo $[-5,3]$



Problema 4: soluzione nel libro, pagina 128.

LEZIONE

5

Teorema di Rolle: Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a)=f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ per cui $f'(x_0)=0$.

Dimostrazione: In base al teorema di Weierstrass esistono punti di minimo e massimo assoluto: $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$.

$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max}) \quad \forall x \in [a,b].$$

Se almeno uno dei due punti è nell'interno di $[a,b]$ ($x_0 = x_{min}$ oppure $x_0 = x_{max}$): Teorema di Fermat implica: $f'(x_0)=0$.

Se x_{min} e x_{max} sono punti di estremo:

Se $x_{min}=a$ e $x_{max}=b$:

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \quad \forall x \in [a,b].$$

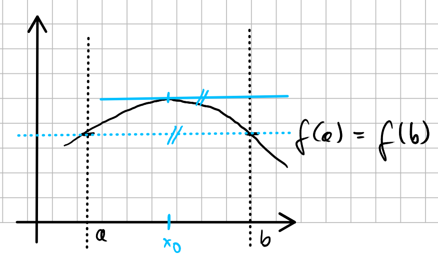
Ma per ipotesi: $f(a)=f(b)$.

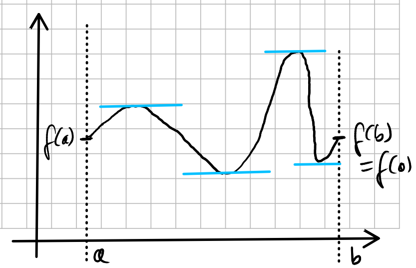
allora la funzione è costante:

$$f(a) \le f(x) \le f(a) \ \forall x\in[a,b] \iff f(x)=f(a) \ \forall x \in [a,b].$$

Ma la funzione costante ha $f'(x)=0 \ \forall x\in(a,b)$. ■

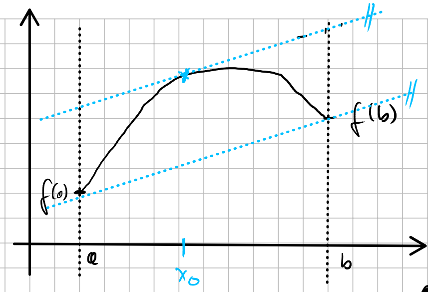
Cosa significa il teorema di Rolle?





6

Generalizzazione:



Esiste un punto x_0 dove la retta tangente è parallela a la retta da $f(a)$ a $f(b)$?

Si!

Teorema di Lagrange: Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che:

$$\underbrace{f'(x_0)}_{\text{una retta tangente}} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendenza della retta da } f(a) \text{ a } f(b)}$$

Dimostrazione: Poniamo

$$g(x) := f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{abbiamo sottratto la retta da } f(a) \text{ a } f(b).}$$

Si verifica: $g(a)=g(b)=0$.

Il teorema di Rolle implica: $\exists x_0 \in (a,b): g'(x_0)=0$.

La derivata è:

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ ■

⚠ Attenzione: Continuità in $x=a$ e $x=b$ è indispensabile!

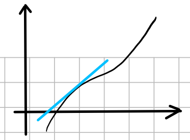
La funzione

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{per } x \in [0,1) \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

non soddisfa l'ipotesi.

Teorema di Rolle / Lagrange non applicabile!

Infatti: $f(0)=f(1)$, ma $f'(x)=1$ per ogni $x \in (0,1)$.



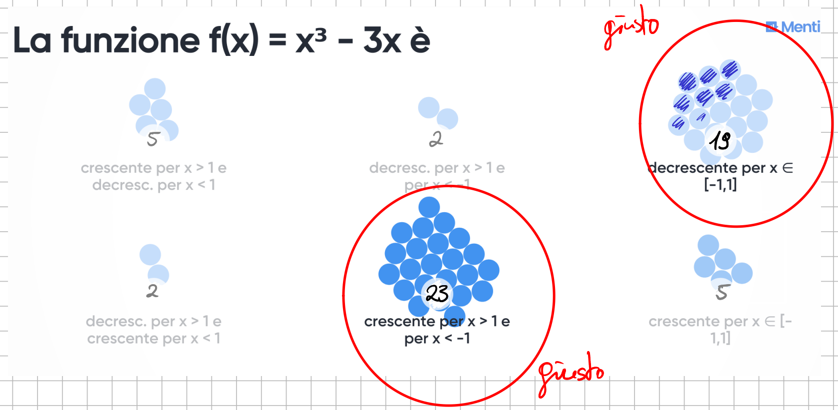
Teorema (Criterio di monotonia):

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b) \iff f$ è crescente in $[a,b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b) \iff f$ è decrescente in $[a,b]$.

— MENTI —

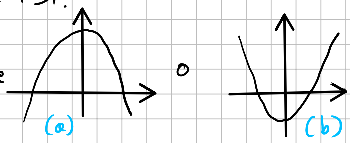


Soluzione Menti: $f(x) = x^3 - 3x$, dominio $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ per $x = -1$, e $x = +1$.

f' è di secondo grado: f' è come



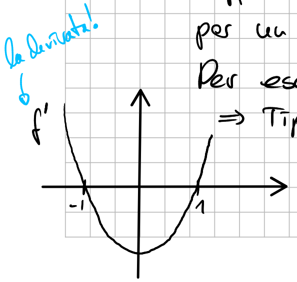
Qual'è il tipo giusto?

Sufficiente controllare se $f'(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$ per un singolo, qualsiasi punto $x_0 > +1$.

Per esempio: $f'(2) = 3(4-1) = 9 > 0$.

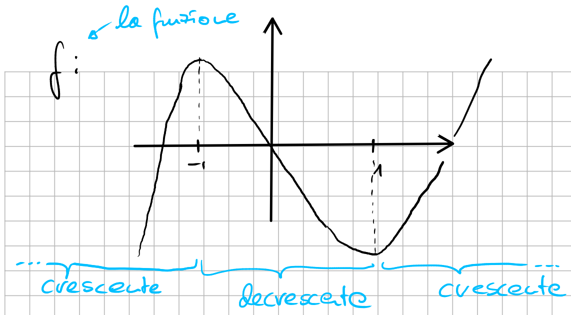
$\Rightarrow$ Tipo (b) è giusto.

la derivata!



$\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$ per $x \in [-1,1]$

$f'(x) \geq 0$ per $x \leq -1$ e per $x \geq +1$.



Dimostrazione: (del criterio di monotonia) Solo per (1).

"$\Leftarrow$" Se f è crescente, per ogni $x \in (a,b)$ e $h > 0$ abbiamo: $f(x+h) \geq f(x)$.

Quindi $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$

Il limite esiste, allora in particolare $\lim_{h\to 0}(\dots) = \lim_{h\to 0+}(\dots)$

Allora $f'(x) = \lim_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$.

"$\Rightarrow$" Supponiamo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Dobbiamo dimostrare:

se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Usando il teorema di Lagrange possiamo scrivere:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1)$

per un $x_0 \in [x_1, x_2] \subset [a,b]$.

Ma $f'(x_0) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$,

quindi $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. ■

Teorema: (Caratterizzazione delle funzioni costanti)

Sia f continua in $[a,b]$.

f è costante in $[a,b]$ se e solo se f è derivabile in (a,b) e la derivata è $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$.

(3)

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" Se f è costante:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

"$\Leftarrow$": Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$:

Il teorema precedente implica: f è crescente.

" " " " f è decrescente.

L'unica possibilità: f è costante. ∎

---

(1)

Per richiamare i risultati di ieri:

(*) **Teorema:** (Criterio di monotonia)

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ è crescente in $[a,b]$

(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ è decrescente in $[a,b]$.

(**) **Teorema:** (Caratt. funzioni costanti)

Sia f continua in $[a,b]$.

f è costante in $[a,b]$ se e solo se f è derivabile in (a,b) e la derivata è $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Teorema nuovo:

Teorema: (Criterio di stretta monotonia)

Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora:

(1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a,b). $\Leftrightarrow$ f è strettamente crescente in $[a,b]$

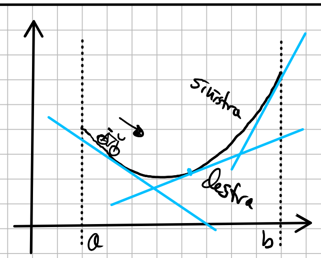
(2) $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in (a,b). $\Leftrightarrow$ f è strettamente decrescente in $[a,b]$.

Dimostrazione: Combinazione di (*) e (**). ∎

Esempio: $f(x) = x^3$ con dominio $\mathbb{R}$ è strettamente crescente. La derivata è $f'(x) = 3x^2$, e $f'(x)$ si annulla per $x=0$ (e solo per $x=0$).

Funzioni convesse e concave

②



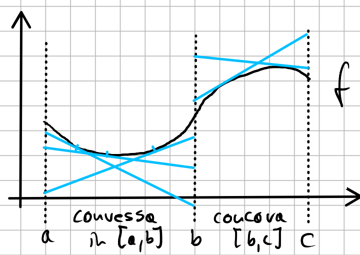
La funzione è al di sopra delle rette tangente in ogni punto.
"Una funzione convessa."

Definizione: Si dice:

f è <u>convessa</u> in $[a,b]$ se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a,b]$

f è <u>concava</u> in $[a,b]$ se $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a,b]$.

Esempio:



Qui: $x = b$ si chiama un <u>punto di flesso</u>, cioè un punto dove cambia da convessa a concava oppure da concava a convessa.

Teorema (criterio di convessità):

Sia f continua in $[a,b]$ e due volte derivabile in (a,b).
Le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti:

(a) f è convessa in $[a,b]$
(b) f' è crescente in (a,b)
(c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.

Un analogo criterio vale per concava / decrescente / $f'' \leq 0$.

Dimostrazione: (b) e (c) sono equivalenti per il criterio di monotonia.

③

<u>"(a) ⇒ (b)":</u> Consideriamo $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$.

Per la definizione di convessità:

(1) $f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x \in [a,b]$

(2) e $f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \quad \forall x \in [a,b]$.

(1) vale in particolare anche per $x = x_2$:

(1') $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

(2) vale anche per $x = x_1$:

(2') $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$.

La somma di "(1') + (2')":

$$\cancel{f(x_2) + f(x_1)} \geq \cancel{f(x_1) + f(x_2)} + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

cancellare

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) - f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

$$0 \geq (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1) \qquad | : (x_2 - x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$

$$0 \geq f'(x_1) - f'(x_2)$$

$$f'(x_2) \geq f'(x_1).$$

<u>"(b) ⇒ (a)":</u> Fissiamo $x, x_0 \in [a,b]$ con $x > x_0$.

Per il teorema di Lagrange esiste $x_1 \in (x, x_0)$ tale che:

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad | \cdot (x - x_0)$$

o equivalentemente: $f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$.

Siccome $x_1 > x_0$ e f' crescente:

$$f'(x_1) \geq f'(x_0).$$

Allora: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Rimane il caso $x < x_0$, ma la dimostrazione funziona in modo analogo. ■

④

Esempi: $f(x) = e^x$ è convessa su $\mathbb{R}$ perché $f''(x) = e^x > 0$.

$g(x) = \ln(x)$ è concava per $x > 0$:

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

——— MENTI ———

La funzione f(x) = x³ - 3x è
(su $\mathbb{R}$)

6
convessa per ogni x

2
concava per ogni x

1
convessa per x < 0, concava per x > 0

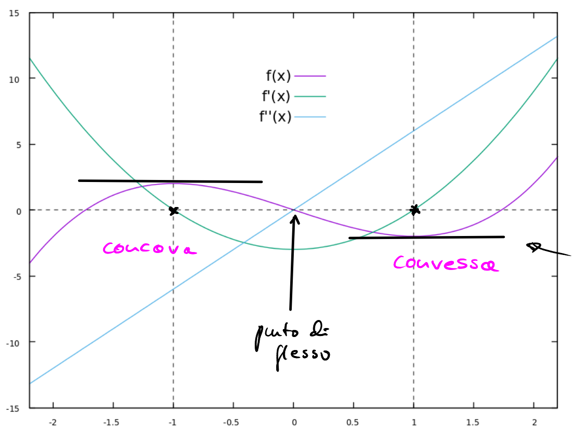
30
concava per x < 0, convessa per x > 0

Soluzione di Menti 1:

$f(x) = x^3 - 3x$: $\quad f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0$ se $x > 0$: f è convessa per $x > 0$

$f''(x) < 0$ se $x < 0$: f è concava per $x < 0$.



retta tangente orizzontale in punti di massimo/minimo relativo

⑤

La funzione arctg(x) è
(su $\mathbb{R}$)

2
convessa per ogni x

2
concava per ogni x

20
convessa per x < 0, concava per x > 0

8
concava per x < 0, convessa per x > 0

Soluzione di Menti 2:

$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$: $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = g_1(g_2(x))$

$g_1(x) = \frac{1}{x} \qquad g_2(x) = 1 + x^2$

$g_1'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad g_2'(x) = 2x$

$f''(x) = g_1'(g_2(x))\, g_2'(x) = -\frac{1}{(1+x^2)^2}\, 2x$

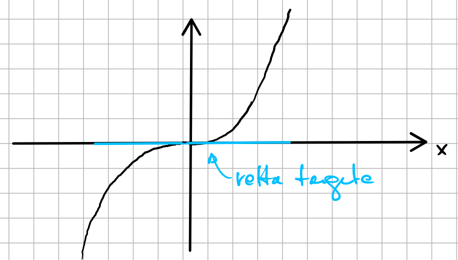
$f''(x) \geq 0$ per $x < 0 \Rightarrow f$ convessa se $x < 0$

$f''(x) \leq 0$ per $x > 0 \Rightarrow f$ concava se $x > 0$.

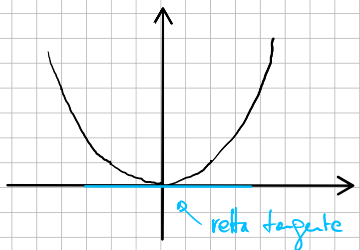
——— Fine del Menti ———

Un criterio per trovare minimi e massimi relativi

La funzione $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, ma $x = 0$ non è né massimo né minimo relativo:



Invece: pensiamo di $f(x) = x^2$:



- Minimo relativo
- al di sopra della retta tangente
- f convessa
- $f''(0) > 0$.

$\boxed{\text{Teorema: (criterio minimo/massimo)}}$

Sia f continua in $[a,b]$ e due volte derivabile in (a,b).
Sia $x_0 \in (a,b)$ con $\underline{f'(x_0) = 0}$. Allora:

(Per $f''(x_0) = 0$ non possiamo decidere per ora.)

$f''(x_0) > 0 \implies x_0$ è un punto di minimo relativo

$f''(x_0) < 0 \implies x_0$ è un punto di massimo relativo.

$\boxed{\text{Dimostrazione:}}$ (Solo per il caso che f'' è una funzione continua)

Consideriamo il caso $f''(x_0) > 0$: Per il teorema della permanenza del segno $f''(x) > 0$ in un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 (con $\delta > 0$).
Quindi f è convessa in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
f è convessa significa:

$$f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0).$$

$f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Questo è la def. di essere minimo relativo. $\blacksquare$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f(x) = x^3$: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$
$f'(0) = 0$
$x = 0$ è un min/massimo?
$f''(0) = 0$, non possiamo decidere così.

$\boxed{\text{Esempio:}}$ La funzione di problema 3, esercizio IV:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 1.25\,x^2 - 7x + \pi \quad \text{in } [-5, 3]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 7$$

Candidati per minimi/massimi relativi: $x \in \{-5, 2, 3\}$. (estremi dell'intervallo)

$x = 2$ è nell'interno, si può usare il teorema per controllare: $f''(x) = x + \frac{5}{2}$

$f''(2) = 2 + \frac{5}{2} > 0$

$\implies x = 2$ è un punto di minimo relativo.

Torniamo a calcolare limiti adesso:

Il teorema di L'Hôpital:

Per limiti di forma indeterminata, per esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(2x)} \quad : \text{ indeterminato, tipo } \text{“}\frac{0}{0}\text{”}.$$

$\boxed{\text{Teorema di l'Hôpital (parte I):}}$ Siano f, g derivabili in un intorno di x_0, e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Se in un intorno di x_0 risulta $g(x) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$

e $g'(x_0) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$: allora si:

forma indeterminata "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

se il secondo limite esiste.

Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$: $f(x) = e^x - 1$ $\quad f'(x) = e^x$

$g(x) = \sin(2x)$.

Controlliamo l'ipotesi:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$ ok

$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \sin(2x) = \sin(0) = 0.$ ok

$\sin(2x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 0$, per $x \neq x_0$. ok

$g'(x) = 2\cos(2x) \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 0$. ok

Allora:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} \overset{\text{Hôpital}}{\underset{\text{H.}}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Motivazione (per l'Hôpital): (invece di una dimostrazione)

Se le derivate sono continue e $g'(x_0) \neq 0$:

f, g derivabili $\Rightarrow f, g$ continue $\Rightarrow f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$g(x_0) = 0.$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)} = \frac{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to x_0} f'(x)}{\lim_{x \to x_0} g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema di l'Hôpital (parte II): Il teorema vale anche per forme indeterminate del tipo "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$".

Esempi:

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\log(x)}$: $\quad x^2 - 1 \longrightarrow 0$, $\ \log(x) \longrightarrow 0$ $\Rightarrow$ forma indeterminata di tipo "$\frac{0}{0}$".

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x \to 1} 2x^2 = 2.$$

non solo per $b \in \mathbb{N}$, anche $b \in \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{e^x}$ con $b > 0$: tipo "$\frac{+\infty}{+\infty}$".

$\overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{b x^{b-1}}{e^x}$ se $b > 1$: ancora tipo "$\frac{+\infty}{+\infty}$"

$$\overset{\text{Hôpital, n volte } (n \in \mathbb{N})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+1)\,x^{b-n}}{e^x}$$

Se arriviamo a $b - n < 0 \iff n > b$:

diventa tipo "$\frac{0}{+\infty}$", allora definito: $= 0.$

Usiamo: $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0$ con $a < 0$

per esempio: $\lim_{x \to \infty} x^{-2.33} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{2.33}} = 0.$

Integrali definiti → vedere il capitolo 8 del libro (Paolo Marcellini - Carlo Sbordone, Elementi di Analisi Matematica uno, Versione semplificata per i nuovi corsi di laurea)

Soluzione Esercizi

1 (i) $[a,b]=[0,2]$ $\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } 0\le x<\frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2} \\ 2-x & \text{se } \frac{3}{2}<x<2 .\end{cases}$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} x^2\,dx + \int_{1/2}^{3/2}(-1)\,dx + \int_{3/2}^{2}(2-x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{1/2} - \left[x\right]_{1/2}^{3/2} + 2\int_{3/2}^{2} 1\,dx - \int_{3/2}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 - \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) + 2\left(2-\frac{3}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{3/2}^{2}$$

$$= \frac{1}{24} - \cancel{1} + \cancel{1} - \left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{24} - 2 + \frac{1}{2}\,\frac{9}{4}$$

(ii) $[a,b]=[-1,1]$, $\quad f(x)=\begin{cases} 0 & x\ne 1 \\ 1 & x=1 .\end{cases}$

Usiamo la caratterizzazione delle funzioni integrabili:

f è integrabile su $[-1,1]$ se, $\forall \varepsilon>0$

$\exists$ partizione P di $[-1,1]$: $S(P)-s(P)<\varepsilon$.

Sia $\varepsilon>0$. Per costruire una partizione, sia $n\in\mathbb{N}$.

Poniamo $\quad P_n := \left(-1, -1+\frac{(1-(-1))}{n}, -1+2\frac{(1-(-1))}{n}, \dots\right)$

$$= \left(-1, -1+\frac{2}{n}, -1+2\frac{2}{n}, -1+3\frac{2}{n}, \dots\right)$$

$$= \left(-1+k\frac{2}{n} : k\in\{0,1,2,\dots n\}\right)$$

$$= \left(x_k : k\in\{0,1,2,\dots n\}\right).$$

$s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$ $\qquad m_k = \inf\{f(x): x\in[x_k,x_{k-1}]\} = 0 \quad \forall k$

$= 0.$

$S(P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})$ $\qquad M_k = \sup\{f(x): x\in[x_k,x_{k-1}]\} = \begin{cases} 0 & \forall k=0,1,2,\dots n-1 \\ 1 & \text{se } k=n .\end{cases}$

$= M_n(x_n-x_{n-1}) = 1\cdot\frac{2}{n}.$

$\sup\{f(x): x\in[1-\frac{2}{n},1]\} = f(1)=1.$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{2}{n} - 0 \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} 0$$

per n sufficientemente grande: $S(P_n)-s(P_n)<\varepsilon$.

$\Rightarrow$ La funzione è integrabile.

$$s(P_n) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le S(P_n)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.}$$

"Se f è una funzione integrabile in un intervallo $[a,b]$ e se $g(x) = f(x)$ in tutti i punti di $[a,b] \setminus \{c\}$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$."

o un numero finito di punti

(iii) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad f(x) = x^2 + g(x)\cos(x)$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (x^2 + \cos(x))\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (x^2 - \cos(x))\,dx$$

$$= \underline{\int_0^{\pi/2} x^2\,dx} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx + \underline{\int_{\pi/2}^{\pi} x^2\,dx} - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} x^2\,dx + [\operatorname{sen}(x)]_0^{\pi/2} - [\operatorname{sen}(x)]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi/2)}_{=1} - \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} \underbrace{- \operatorname{sen}(\pi)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}$$

$$= 2 + \frac{\pi^3}{3}.$$

(iv) $\int_0^1 f(x)\,dx = ? \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

L'integrale <u>non</u> esiste, la funzione non è integrabile.

<u>Dimostrazione:</u>

Sia $P = (x_0, x_1, \dots x_n)$ una partizione dell'intervallo $[0,1]$.

Allora $S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} = 1$$

$$\Rightarrow S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = (\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (x_3 - \cancel{x_2}) + \dots + (x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - x_0 = b - a = 1 - 0 = 1.$$

$$\Rightarrow S(P) = 1.$$

Invece $s(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, m_k \qquad m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k-1}]\} = 0$

$= 0.$

Abbiamo dimostrato: $S(P) = 1$, $s(P) = 0$ per ogni partizione P di $[0,1]$.

Ci ricordiamo: f è integrabile se e <u>solo se</u> $\forall \varepsilon > 0\ \exists P : S(P) - s(P) < \varepsilon$.

Con, per esempio, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, una partizione di questo tipo <u>non</u> esiste. Allora f non è integrabile.

$\boxed{2}$ Non è vero! Manca "continuità".

Per confutarla: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 0 + 1 = 1$$

Ma per ogni $x_0 \in [0,1]$: $f(x_0)(b-a) = 0\,(2-0) = 0$

per ogni $x_0 \in (1,2]$: $f(x_0)(b-a) = 1 \cdot (2-0) = 2.$

④

3 (i) $\int_{-1}^{1}(x-1)(x+3)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$

$= \int_{-1}^{1}x^2\,dx + 2\int_{-1}^{1}x\,dx - \int_{-1}^{1}3\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} - \left[3x\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-1)^3 + 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] - \left[3-(-3)\right]$

$= \frac{2}{3} + 0 - 6 = -6 + \frac{2}{3}$ $\blacksquare$

(ii) $\int_0^{\pi/2}(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\,dx$

$F(x) = \cos^2(x)$

$F'(x) = 2\cos(x)\,(-\operatorname{sen}(x))$

non è una primitiva.

$F(x) = \cos(x)\operatorname{sen}(x)$

$F'(x) = \overset{\text{Derivata}}{-\operatorname{sen}(x)}\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\overset{\text{Derivata}}{\cos(x)}$

$= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.

$\int_0^{\pi/2}(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x))\,dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi/2}$

$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = 0$. $\blacksquare$

(iii) $\int_0^{\pi/2} 1\cdot\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)\,dx$

$f'\,g + f\cdot g'$

$H(x) = f(x)\,g(x)$

$H'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

$H(x) = x\operatorname{sen}(x)$

$H'(x) = \operatorname{sen}(x) + x\cos(x)$.

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}(x) + x\cos(x))\,dx = \left[H(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{2}$. $\blacksquare$

(iv) $\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = ?$ Forse $\frac{2x}{x^2+1}$ è la derivata di una funzione composta...

⑤

$2x = D(x^2+1)$

Allora proviamo con una primitiva del tipo

$G(x) = f(x^2+1)$

e dobbiamo ancora trovare la funzione f.

$G'(x) = f'(x^2+1)\cdot 2x$ Sembra che vogliamo $f'(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}$.

Allora prendiamo $f(x) = \ln(x)$.

$\Rightarrow G'(x) = \frac{1}{x^2+1}\,2x$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[G(x)\right]_{-1}^{1} = \left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}$

$= \ln(2) - \ln(2) = 0$. $\blacksquare$

5 (i) Se $F' = f$ e $G' = g$, allora $2F - G$ è una primitiva di $2f - g$.

$D(2F - G) = 2F' - G' = 2f - g$. $\blacksquare$

(ii) Dimostrare: $\operatorname{sen}^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Da dimostrare: $\operatorname{sen}^2(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2} = 0$.

$\operatorname{sen}^2(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2} = \operatorname{sen}^2(0) + \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}$

formula fondamentale $\longrightarrow$ $+ \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}^2(t) + \frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2}\right)dt$

$= 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^x\left(2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\cdot 2\right)dt$

$= \int_0^x(\underbrace{2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \operatorname{sen}(2t)}_{=0})\,dt = 0$.

(formula di addizione) $\blacksquare$

(iii) Se F è primitiva di f, e G di g, $F\cdot G$ è primitiva di $f\cdot g$?

No!

$f(x) = 1$
$g(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)g(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) = x\ (\cancel{+c_1})$
$G(x) = x\ (\cancel{+c_2})$ per esempio $=0$

$F(x)\,G(x) = x^2$
$D(F(x)G(x))$
$= 2x \neq f(x)g(x)$. $\blacksquare$

5 Sia $[a,b] = [\frac{1}{10}, 1]$. $\quad x - \operatorname{sen}(x)\cos(x) > \quad \forall x \in [a,b]$.

Studiare su $[a,b]$ la funzione

$$f(x) = \int_{1/10}^{x} \frac{\operatorname{tg}(t)}{t}\, dt .$$

<u>Passo 0:</u> dominio $[\frac{1}{10}, 1]$

<u>Passo 1:</u> simmetrie: non rilevate.

Intersezioni assi: $\frac{\operatorname{tg}(t)}{t} > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \supset [\frac{1}{10}, 1]$.
contiene

$f(x) > 0 \quad \forall x \in (\frac{1}{10}, 1]$.

Solo $f(\frac{1}{10}) = \int_{1/10}^{1/10} \frac{\operatorname{tg}(t)}{t}\, dt = 0$.

<u>Passo 2:</u> Asintoti non rilevati.

Limiti al bordo del dominio.

$f(\frac{1}{10}) = 0 \qquad f(1) = \int_{1/10}^{1} \frac{\operatorname{tg}(t)}{t}\, dt > 0$

(difficile calcolare)

<u>Passo 3:</u> $f'(x) = \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} > 0$

$\Rightarrow f$ è strettamente crescente.

Non ci sono min/max nell'interno dell'intervallo.

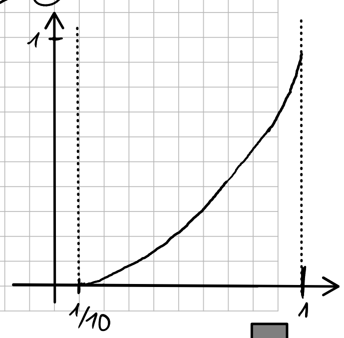
Min assoluto: $f(\frac{1}{10}) = 0$, il max assoluto è $f(1)$.

<u>Passo 4:</u> $f''(x) = \frac{x - \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x^2\cos^2(x)} > 0$

$\Rightarrow f$ è convessa in $[\frac{1}{10}, 1]$.

Non ci sono punti di flesso.

<u>Passo 5:</u> Asint. obliqui: non rilevate.



> **Teorema:** Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, allora f è integrabile sull' $[a,b]$.

Ci ricordiamo: una funzione f è continua in $[a,b]$ se:

$\forall x_0 \in [a,b] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che:

$x \in [a,b]$ e $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

⚠ In generale δ dipende da x_0.

<u>Esempio:</u> $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$. Sia $x_0 \in [a,b]$, sia $\varepsilon > 0$.

$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|$

$\leq |x - x_0| \; 2|x_0|$ — per x vicino a x_0: $|x + x_0| < 2|x_0|$

Allora scegliamo: $\delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|}$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \leq |x - x_0| \, 2|x_0| < \delta \, 2|x_0|$

Importante: $\delta = \delta(x_0)$! $\quad < \frac{\varepsilon}{2|x_0|} 2|x_0| = \varepsilon$.

> **Definizione:** Si dice che $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>uniformemente continua</u> nell'intervallo I se:
>
> δ non dipende da x_0 qui!
>
> $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:
>
> $x, \tilde{x} \in I$ e $|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

<u>Esempi:</u> (i) La funzione $f(x) = x^2$ su $\mathbb{R}$ <u>non</u> è uniformemente continua.

(ii) $f(x) = \cos(x)$ su $\mathbb{R}$ è unif. cont.: Sia $\varepsilon > 0$.

$\tilde{x} = x + h$

$|\cos(x) - \cos(x+h)|$

$= |\cos(x) - \cos(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)|$ — formula d'addizione

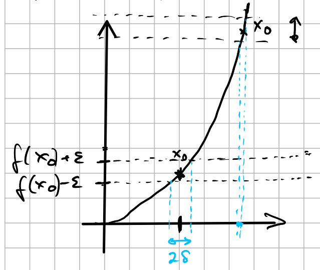
$\leq \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1} |1 - \cos(h)| + \underbrace{|\operatorname{sen}(x)|}_{\leq 1} |\operatorname{sen}(h)|$

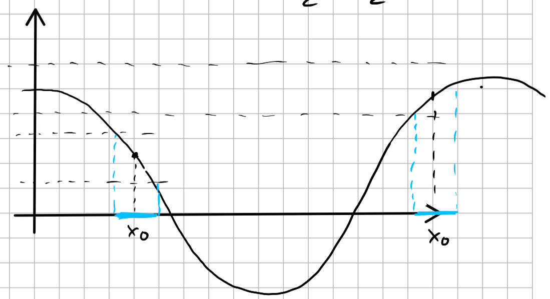
$\leq |1 - \cos(h)| + |\operatorname{sen}(h)|$.

⑧

Sappiamo già: $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \; |1-\cos(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\; |\sin(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ } il punto x ora alla (solo $h = x - \tilde{x}$)

Allora: $|x-\tilde{x}| < \delta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$





(iii) $f(x) = x^2$ su $[0,1]$ (invece di $\mathbb{R}$):

Come già visto: $|x^2 - x_0^2| \le |x - x_0|\, 2\underbrace{|x_0|}_{\le 1} \le 2|x - x_0|.$

Sufficiente scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \le 2|x - x_0| < 2\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

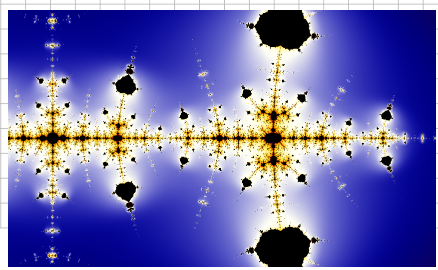
Teorema di Cantor: Sia f continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato), allora f è uniformemente continua.

Riguardate: teorema di Bolzano – Weierstrass.
Si usa per la dimostrazione (domani).

Anche per domani: riguardate i numeri complessi
e il gioco a_n pari $\longrightarrow \frac{a_n}{2}$, a_n dispari $\longrightarrow 3a_n + 1$ } iterazione

7, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5,
16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1,
4, 2, 1, 4, 2, 1 ...

Proviamo di capire come arriva il frattale



①

Teorema di Cantor: Sia f continua in $[a,b]$ (chiuso e limitato!). Allora f è uniformemente continua in $[a,b]$.

Dimostrazione: Procediamo per assurdo.

Continuità uniforme significa:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \; \forall\, x \text{ e } \tilde{x} \text{ in } [a,b] \text{ con } |x - \tilde{x}| < \delta :$
$|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$

Negazione:

$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 : \; \exists\, x \text{ e } \tilde{x} \text{ in } [a,b] \text{ con } |x - \tilde{x}| < \delta :$
$|f(x) - f(\tilde{x})| \ge \varepsilon.$

"$\forall \delta > 0$": scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indichiamo con $x_n, \tilde{x}_n$ i corrispondenti punti per cui $|x_n - \tilde{x}_n| < \delta = \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \ge \varepsilon$.

x_n è nell' $[a,b]$, allora per il teorema di Bolzano – Weierstrass esiste una successione estratta x_{n_k} convergente: $x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in [a,b]$.

Inoltre $\underbrace{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}}_{\to x_0 \; (\text{per } k \to +\infty)} < \tilde{x}_{n_k} < \underbrace{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}}_{\to x_0}$

Per il teorema dei carabinieri: anche $\tilde{x}_{n_k} \to x_0$.

Per l'ipotesi di continuità:

$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_0) \qquad f(\tilde{x}_{n_k}) \longrightarrow f(x_0).$

Contrasta con il fatto che

$|f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| \ge \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Adesso la dimostrazione di "f è continua in $[a,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$.".

Dimostrazione:

Per il teorema di Cantor f è uniformemente continua:

fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{per ogni coppia } x, \tilde{x} \in [a,b] \text{ con } |x - \tilde{x}| < \delta.$$

Sia P una partizione di $[a,b]$ tale che:

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta \quad \text{per ogni } k \in \{1,2,3,\dots n\}.$$

Allora per $m_k := \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ e per $M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

abbiamo: $M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall k \in \{1,2,\dots n\}$.

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a} (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

f è continua,
$[x_{k-1}, x_k]$ è chiuso
Weierstraß: $\exists$ minimo,
$\Rightarrow \exists \tilde{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$:
$m_k = f(\tilde{x}_k)$.
Stessa cosa per $M_k = f(\tilde{\tilde{x}}_k)$
$\Rightarrow M_k - m_k = f(\tilde{\tilde{x}}_k) - f(\tilde{x}_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

L'integrale indefinito:

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

Se f è continua e $F' = f$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

Definizione: Sia f una funzione continua in $[a,b]$. L'insieme di tutte le primitive di f in $[a,b]$ si chiama integrale indefinito di f, indicato con $\int f(x)\,dx$.

Allora $\int f(x)\,dx = \{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\} = F(x) + c$

per una primitiva F di f.

⚠ $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero reale. $\int f(x)\,dx$ è un insieme di funzioni.

Regole: $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\forall c \in \mathbb{R}$: $\int c\,f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$.

Integrali indefiniti:

$\int x^b\,dx = \dfrac{x^{b+1}}{b+1} + c \quad$ se $b \neq -1$

Dimostrazione
$D\left(\dfrac{x^{b+1}}{b+1} + c\right)$
$= \dfrac{1}{b+1} D x^{b+1}$
$= \dfrac{1}{(b+1)} (b+1) x^b$
$= x^b$.

se $b = -1$: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

$\int e^x\,dx = e^x + c$

$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$

$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$

$-\int \operatorname{sen}(x)\,dx = \cos(x) + c$

$D(\operatorname{sen}(x) + c) = \cos(x)$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \operatorname{tg}(x) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c$

tabella da imparare a memoria

[**Non** esiste una formula elementare per $\int e^{-x^2} dx$.]

Metodi per calcolare integrali indefiniti:

1) Individuare una primitiva e controllare, usando le regole per le derivate.

2) Decomposizione in somme:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = ?$$

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= x - \ln|x+1| + c.$$

$$\int tg^2(x)\, dx = ?$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\int tg^2(x)\, dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 1 \right) dx = tg(x) - x + c.$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)} dx = ?$$

$$= \int \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} dx = \int \frac{\sin^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{\sin(x)}\cos(x)} dx + \int \frac{\cos^{\cancel{2}}(x)}{\sin(x)\cancel{\cos(x)}} dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx + \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx$$

$$= -\int \frac{1}{\cos(x)} \underbrace{(-\sin(x))}_{D\cos(x) = -\sin(x)} dx + \int \frac{1}{\sin(x)} \cos(x)\, dx$$

$$= -\log|\cos(x)| + \log|\sin(x)| + c$$

$D \log|\cos(x)| = \frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x))$

$$= \log \frac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|} + c$$

$$\int \sin^2(x)\, dx = \int \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int 1\, dx - \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin(2x)\frac{1}{2} + c.$$

$$\int \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx = \ln|g(x)|$$

Perché valore assoluto?

$$\boxed{\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

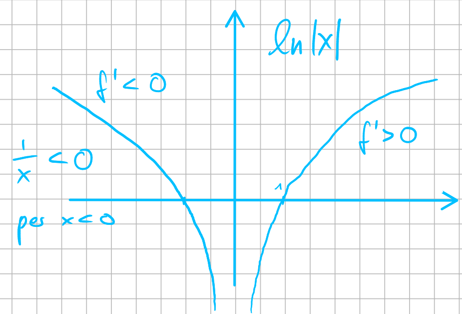
Dimostrazione:

per $x > 0$: $\ln|x| = \ln x$

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

per $x < 0$: $\ln|x| = \ln(-x)$

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x} \underbrace{D(-x)}_{=-1} = \frac{1}{x}$$



non rilevate per l'esame

Il frattale di Collatz

Poniamo $a_0 \in \mathbb{N}$

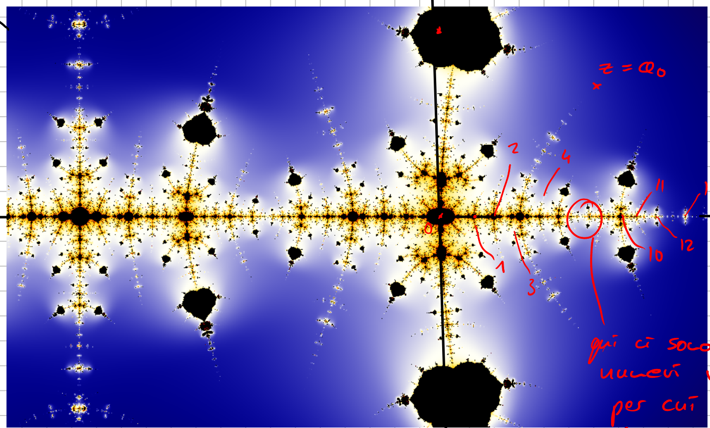
e $a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ è pari} \\ 3a_n+1 & \text{se } a_n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Esempio: per $a_0 = 17$ otteniamo la successione

$17,\ 3\cdot 17+1 = 52,\ \frac{52}{2} = 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,$

$8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1 \ldots$

piano complesso $\mathbb{C}$



nero: numeri per cui arriviamo in un loop

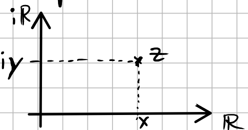
blu: diverge ad $+\infty$ velocemente

giallo: diverge ad $+\infty$ lentamente.

qui ci sono alcuni numeri reali per cui l'iterazione non arriva in un loop.

Il piano complesso: $z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$



Semplificare: $a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ pari} \\ \frac{3a_n+1}{2} & \text{se } a_n \text{ dispari.} \end{cases}$

Poniamo

$f_1(z) := \cos^2\left(\frac{\pi}{2} z\right) \qquad z \in \mathbb{R}$

$f_2(z) := \sin^2\left(\frac{\pi}{2} z\right)$

Se z è pari: $z = 2n,\ n \in \mathbb{N}$.

allora $f_1(z) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2n\right) = \cos^2(\pi n) = (\pm 1)^2 = 1.$

$f_2(z) = 1 - f_1(z) = 1 - 1 = 0.$

Inoltre: z è dispari: $z = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$:

$f_1(z) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = \cos^2\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f_2(z) = 1 - f_1(z) = 1.$

Allora possiamo usare queste funzioni per distinguere numeri pari e dispari!

(*) Poniamo $a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n \cos^2\left(\frac{\pi}{2} a_n\right) + \frac{1}{2}(3a_n+1)\sin^2\left(\frac{\pi}{2} a_n\right).$

Con questa formula si può fare l'iterazione anche per $a_0 \in \mathbb{R}$, con numeri reali invece di naturali.

Infatti, (*) vale anche per numeri complessi (se conosciamo la definizione di cos e sen per numeri complessi).

(non fatto a lezione)

più semplice: **Frattale di Mandelbrot**

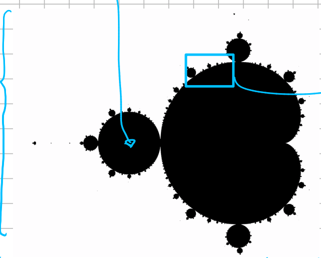
Iterazione di Mandelbrot: $z_0 = 0 \in \mathbb{C}.$

$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad c \in \mathbb{C}.$

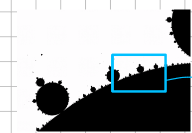
parametro

In nero: valori di $c \in \mathbb{C}$ tale che la successione non diverge ad $+\infty$:

piano complesso



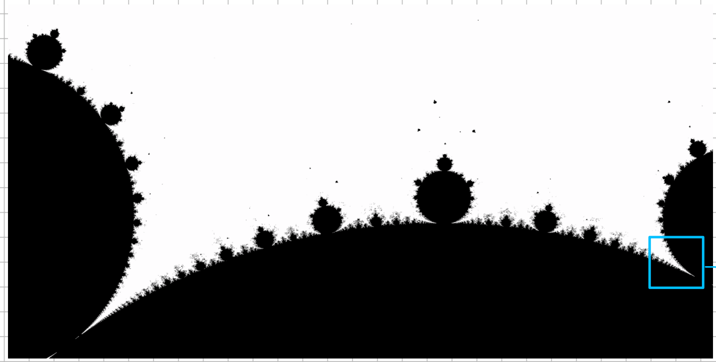
faccio uno zoom



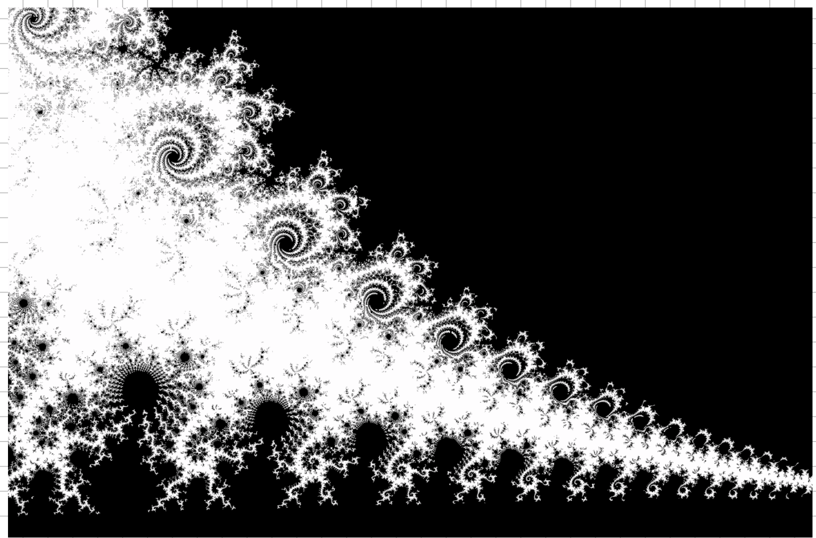
(bianco: numeri $c \in \mathbb{C}$ tale che z_n diverge ad infinito)

8

zoom



zoom



...

9

Torniamo alla lezione normale adesso:

3) Integrazione delle funzioni razionali:

Una funzione razionale è un rapporto di due polinomi $f(x)$ e $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$(m, n \in \mathbb{N})$.

Se $m > n$: usare divisione tra polinomi per ottenere:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

resto: polinomio con grado inferiore al grado di $g(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \underbrace{\int q(x)\, dx}_{\text{integrale di un polinomio: banale.}} + \int \frac{r(x)}{g(x)}\, dx$$

— Da studiare per la prossima volta: divisione tra polinomi

(1)

3) Integrazione delle funzioni razionali

Una funzione razionale è un rapporto di due polinomi f, g:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Se $m \geq n$ usiamo divisione tra polinomi:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

$r(x)$ — resto: polinomio di grado inferiore al grado del divisore $g(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{g(x)\,q(x) + r(x)}{g(x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\int q(x)\,dx}_{\text{integrale di un polinomio (banale)}} + \underbrace{\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx}_{\text{integrale di una funzione razionale con grado del numeratore meno al grado del denominatore}}.$$

$\boxed{\text{Esempio:}}$ Divisione tra polinomi:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}$$

Lo scriviamo:

da calcolare

$$x^5 - 3x^4 + x + 3 = (x^2-1)(x^3 - 3x^2 + x - 3) + 2x$$

resto $r(x)$

$$\begin{array}{l}
x^5 - 3x^4 + x + 3 \\
-(x^5 - x^3) \\
\hline
-3x^4 + x^3 + x + 3 \\
-(-3x^4 + 3x^2) \\
\hline
x^3 - 3x^2 + x + 3 \\
-(x^3 - x) \\
\hline
-3x^2 + 2x + 3 \\
-(-3x^2 + 3) \\
\hline
2x
\end{array}$$

Importante: fare il controllo di calcolare il prodotto del risultato.

$$\Rightarrow f(x) = x^5 - 3x^4 + x + 3 = g(x)\,q(x) + r(x)$$

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 \\ q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ r(x) = 2x. \end{cases}$$

(2)

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$$

$$= \underbrace{\int (x^3 - 3x^2 + x - 3)\,dx}_{= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + c} + \underbrace{\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx}_{\text{qui: "tipo funzione composta"} = \ln|x^2-1| + c.}$$

In generale:

Rimane calcolare $\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx$ con grado del numeratore inferiore al grado del denominatore:

Qui, per semplicità, solo per il caso in cui $g(x)$ è un polinomio di grado 2:

$$\int \frac{r(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c}\,dx, \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

① Primo caso: $g(x)$ ha due radici reali distinti:

Esempio: $\dfrac{x+7}{x^2-x-2}$ $\qquad x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

Proviamo di trovare $A, B \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\frac{1x + 7}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (-2A+B)}{x^2 - x - 2}$$

Dobbiamo risolvere:
$$A + B = 1$$
$$-2A + B = 7$$

$\Rightarrow A = 1 - B$

$\Rightarrow -2(1-B) + B = 7 \Rightarrow B = 3$

$\Rightarrow A = -2.$

$$\Rightarrow \int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-2}\,dx .$$
$$= -2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{x-2}\,dx$$
$$= -2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + c .$$

(ii) <u>una radice doppia:</u> Esempio: $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

Qui usiamo: $\dfrac{x}{x^2+2x+1} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$.

Calcolare A, B come per (i) e calcolare l'integrale.

Dettagli $\longrightarrow$ Esercizio VII !

(iii) <u>$g(x)$ non ha radici reali:</u>

Esempio: $\dfrac{1-2x}{x^2+2x+5} = \dfrac{A\,(\text{derivata del denominatore}) + B}{x^2+2x+5}$
$$= \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2A = -2 \\ 2A+B = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1 \\ B = 3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{(-1)(2x+2)+3}{x^2+2x+5}\,dx$$

usare "integrale del tipo funzione composta".

Dettagli $\longrightarrow$ Esercizio VII !

4) Integrazione per parti:

Formula di int. per parti: Se f, g sono due funzioni derivabili con derivata continua, risulta

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,\underbrace{g(x)}_{g(x)=\int g'(x)\,dx} - \int f'(x)\,g(x)\,dx .$$

Dimostrazione: Partiamo dalla formula di derivazione del prodotto: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Calcoliamo gli integrali indefiniti:

$$f(x)g(x) + c = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx .$$

per $c=0$: diventa la formula scritta. $\blacksquare$

Esempi: • $\int x\cos(x)\,dx$ Poniamo $f(x) := x$, $g'(x) := \cos(x)$.

Quindi: $g(x) = \sin(x)$.

$$\Rightarrow \int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx = \underset{f\,g}{x\sin(x)} - \underset{\int f' g}{\int 1 \sin(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C . \quad \blacksquare$$

• $\int x^2\cos(x)\,dx$: $f(x) := x^2$, $g'(x) := \cos(x)$
$g(x) = \int g'(x) = \sin(x)\ (+c)$.

$$\int \underset{f}{x^2}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx = \underset{f\,g}{x^2\sin(x)} - \underset{\int f' g}{\int 2x\sin(x)\,dx}$$

Integriamo di nuovo per parti:

$\int x\sin(x)\,dx$ $f(x) := x$, $g'(x) = \sin(x)$
$g(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)\ (+c)$

$$\Rightarrow \int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sin(x)}\,dx = \underset{f\,g}{x(-\cos(x))} - \underset{\int f' g}{\int 1(-\cos(x))\,dx}$$
$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\Rightarrow \int x^2\cos(x)\,dx = x^2\sin(x) - 2\left(-x\cos(x) + \sin(x) + C\right)$$
$$= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C . \quad \blacksquare$$

trucco importante

$\int \ln(x)\,dx$:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{=:f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx$$

$f(x) = \ln(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = 1$
$g(x) = \int 1\,dx = x$

$$= \underset{f}{\ln(x)}\,\underset{g}{x} - \underset{\int f' g}{\int \frac{1}{x} x\,dx}$$

$$= \ln(x)\,x - \int 1\,dx = \ln(x)\,x - x + c. \quad \blacksquare$$

$\int e^x \sin(x)\,dx$:

(*) $$\int \underset{f}{e^x}\,\underset{g'}{\sin(x)}\,dx = \underset{f\,g}{e^x(-\cos(x))} - \underset{\int f' g}{\int e^x(-\cos(x))\,dx}$$

$$= -e^x\cos(x) + \int e^x \cos(x)\,dx.$$

di nuovo integ. per parti

$$\int \underset{f}{e^x}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx = \underset{f\,g}{e^x \sin(x)} - \underset{\int f' g}{\int e^x \sin(x)\,dx}$$ inserire in (*)

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

risolvere l'equazione per l'integrale!

$$\Rightarrow 2\int e^x \sin(x)\,dx = -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$:2$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x)\,dx = e^x\left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}\right) + c$$

$$= \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2} + c$$

Simile: $\int \cos^2(x)\,dx$:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \underset{f}{\cos(x)}\,\underset{g'}{\cos(x)}\,dx$$

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$
$g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \int \cos(x)\,dx = \sin(x).$

$$= \underset{f\,g}{\cos(x)\sin(x)} - \underset{\int f' g}{\int (-\sin(x))\sin(x)\,dx}$$

(*) $$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx$$ $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int (1 - \cos^2(x))\,dx$$

$$= \cos(x)\sin(x) + \int 1\,dx - \int \cos^2(x)\,dx$$

$$= \cos(x)\sin(x) + x + c - \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2(x)\,dx = \cos(x)\sin(x) + x + c \qquad |:2$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{x}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Domanda: usare anche int. per parti per $\int \sin^2(x)\,dx$?

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \underset{f}{\sin(x)}\,\underset{g'}{\sin(x)}\,dx$$

$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)$
$g'(x) = \sin(x)$
$g(x) = -\cos(x)$

$$= \underset{f\,g}{\sin(x)(-\cos(x))} - \underset{\int f' g}{\int \cos(x)(-\cos(x))\,dx}$$

$$= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \underbrace{\cos(x)\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}_{=0} + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x)\,dx = \int \cos^2(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Integrazione per parti per integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$\longrightarrow$ Dimostrazione sull'Esercizio VII.

(7)

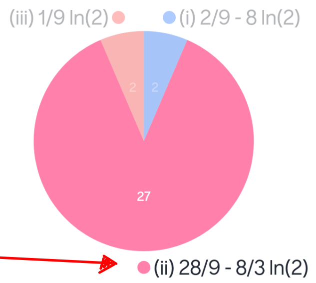
Menti:

Qual'è l'integrale seguente?

$$\int_1^2 x^2 (1 - \ln(x))\, dx \,.$$

La soluzione è

(i) $\frac{2}{9} - 8\ln(2)$,   (ii) $\frac{28}{9} - \frac{8}{3}\ln(2)$,   (iii) $\frac{1}{9}\ln(2)$.



giusto

Soluzione del Menti:

$$\int_1^2 x^2(1 - \ln(x))\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \int_1^2 \underset{f}{\ln(x)}\;\underset{g'}{x^2}\,dx$$

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x^2$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \left(\underbrace{\left[\ln(x)\frac{1}{3}x^3\right]_1^2}_{fg} - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{x}\frac{1}{3}x^3\,dx}_{\int f'g}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \left(\ln(2)\frac{8}{3} - 0 \quad - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\,dx\right)$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\underbrace{\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]}_{=7/3}$$

$$= \frac{7}{3} - \ln(2)\frac{8}{3} + \frac{7}{9}$$

$$= \frac{21}{9} + \frac{7}{9} - \ln(2)\frac{8}{3} = \frac{28}{9} - \ln(2)\frac{8}{3}.$$ $\blacksquare$

(1)

Soluzione Esercizio VI

Problema 1 Dimostra: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e dispari, allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ per ogni $a > 0$.

Soluzione:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \underbrace{f(-x)}_{\substack{f \text{ dispari:} \\ f(-x) = -f(x)}}\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0.$$

Perché $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx$?

Possibilità per la dimostrazione: (i) $S(P), s(P)$ (lungo conto)

(ii) usando sostituzione (oggi a lezione)

(iii) usando la primitiva:

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, $F' = f$.

Allora $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-a)$.   (*)

Forse $F(-x)$ è una primitiva di $f(-x)$?

$\frac{d}{dx}F(-x) = F'(-x)\frac{d}{dx}(-x) = -f(-x)$.   No!

Ma $-F(-x)$ è: $\frac{d}{dx}(-F(-x)) = f(-x)$.

$$\Rightarrow \int_0^a f(-x)\,dx = \left[-F(-x)\right]_0^a = -F(-a) - (-F(-0))$$

$$= F(0) - F(-a) \overset{(*)}{=} \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$ $\blacksquare$

Problema 2: (1) Sia $b \neq -1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivata continua. Dimostra:

$$\int (f(x))^b f'(x)\,dx = \frac{1}{b+1}(f(x))^{b+1} + C.$$

②

<u>Dimostrazione:</u> $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{b+1}(f(x))^{b+1}+c\right)$

formule per la derivata di una funzione composta.

$$= \frac{1}{\cancel{b+1}}\cancel{(b+1)}(f(x))^b f'(x) = (f(x))^b f'(x).$$

(2) $\int tg(x)\,dx$: $\int tg(x)\,dx = \int \frac{sen(x)}{cos(x)}\,dx = \int \frac{1}{cos(x)} sen(x)\,dx$

derivata di $cos(x)$: $-sen(x)$.

Ci ricordiamo: $D\ ln|x| = \frac{1}{x}$.

$\boxed{D\ ln|x| = \frac{1}{x}}$

Proviamo con $F(x) = ln|cos(x)|$:

$$DF(x) = \frac{1}{cos(x)} D\,cos(x) = \frac{1}{cos(x)}(-sen(x)).$$

$F(x) = -ln|cos(x)|$:

$$DF(x) = \frac{1}{cos(x)} sen(x)$$

$$\Rightarrow \int tg(x) = -ln|cos(x)| + c.$$

(3) $\int_2^{10} \frac{3x^2}{5x^2+2} \times dx$:

inserire $+\frac{2}{5} - \frac{2}{5}$

$$\int \frac{3x^2}{5x^2+2} \times dx = \frac{3}{5}\int \frac{x^2}{x^2+2/5} \times dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{x^2+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}}{x^2+\frac{2}{5}} \times dx = \frac{3}{5}\int\left(1-\frac{2/5}{x^2+2/5}\right) \times dx$$

$$= \frac{3}{5}\int x\,dx - \frac{3}{25}\int \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}} 2x\,dx$$

$\frac{1}{2}x^2$ primitiva

Derivata di $x^2+\frac{2}{5}$

$F(x) = ln|x^2+\frac{2}{5}| + c$

$DF(x) = \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}} D(x^2+\frac{2}{5})$

$= \frac{1}{x^2+\frac{2}{5}} 2x$

$$= \frac{3}{5}\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{25} ln|x^2+\frac{2}{5}| + c$$

$$= \int \frac{3x^2}{5x^2+2} \times dx$$

③

$$\int_2^{10} \frac{3x^2}{5x^2+2} \times dx = \left[\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{25} ln\left|x^2+\frac{2}{5}\right|\right]_2^{10}$$

$$= 30 - \frac{3}{25} ln\left|100+\frac{2}{5}\right| - \frac{6}{5} + \frac{3}{25} ln\left|4+\frac{2}{5}\right|$$

$$= 30 - \frac{6}{5} + \frac{3}{25} ln\left|\frac{4+2/5}{100+2/5}\right|.$$

$\boxed{\text{Problema 3:}}$ f è lipschitziana se esiste una $L > 0$:

$$|f(x)-f(\tilde{x})| \leq L|x-\tilde{x}| \quad \forall x,\tilde{x} \text{ nel dominio di } f.$$

(1) Dimostra: una funzione lipschitziana è uniformemente continua.

<u>Soluzione:</u> Uniformemente continua significa:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x, \tilde{x} \in I$ con $|x-\tilde{x}| < \delta$:

$$|f(x)-f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Dimostrazione: Sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$.

Quindi:

$$|x-\tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(\tilde{x})| \overset{\text{lipschitziana}}{\leq} L|x-\tilde{x}|$$

$$< L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

(2) Sia f derivabile in I. Allora f è lipschitziana con costante L se e solo se $|f'(x)| \leq L \ \forall x \in I$.

<u>Dimostrazione:</u>

<u>"$\Rightarrow$":</u> f lipschitziana: $|f(x)-f(\tilde{x})| \leq L|x-\tilde{x}|$.

Allora $|f'(x)| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$

$$\leq \lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h\to 0}\frac{L|(x+h)-x|}{|h|}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{L\cancel{|h|}}{\cancel{|h|}} = L. \quad \Rightarrow |f'(x)| \leq L.$$

<u>"$\Leftarrow$":</u> Usiamo il teorema di Lagrange:

Per ogni a,b nell'interno di I: esiste $x_0 \in (a,b)$

per cui: $\quad f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

In particolare, per $x, \tilde{x}$ nell'interno di I esiste $x_0 = x_0(x,\tilde{x})$ tale che: $\dfrac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(x_0)$.

$$\Rightarrow \quad f(\tilde{x})-f(x) = f'(x_0)(\tilde{x}-x)$$

$$\Rightarrow \quad |f(\tilde{x})-f(x)| = \underbrace{|f'(x_0)|}_{\leq L \text{ per l'ipotesi}} |\tilde{x}-x| \quad \leq L|\tilde{x}-x|.$$

LEZIONE

5) Integrazione per sostituzione

Integrazione per sostituzione: Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile con derivata continua. Risulta
$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \Big|_{x=g(t)}$$

Dimostrazione: Esercizio VII.

Se $\int f(x)dx = F(x)+c$, allora
$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} = F(x)+c\Big|_{x=g(t)} := F(g(t))+c.$$

Per ricordarsi della formula:

(1) $x = g(t)$ $\qquad \dfrac{dx}{dt} = g'(t)$ $\qquad$ (2) "$dx = \boxed{g'(t)}\,dt$" non dimenticare!

(3) $t = g^{-1}(t)$.

Esempi:

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx$ $\qquad$ Sostituzione: $x := t^2 = g(t)$ $\quad \sqrt{x}=t$

$\qquad dx = \boxed{g'(t)}\,dt = \boxed{2t}\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x}-3}\,dx \overset{\text{passo (1)}\ x=t^2}{=} \int \frac{1}{t-3}\,\boxed{2t}\,dt = 2\int \frac{t-3+3}{t-3}\,dt$$

passo (2) $dx = 2t\,dt$

$$= 2\left(\int 1\,dt + 3\int \frac{1}{t-3}\,dt\right)$$

$$= 2\,(t + 3\ln|t-3| + c)$$

passo (3) $t = \sqrt{x}$

$$= 2\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-3| + c.$$

Controllare il nostro risultato: calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-3| + c\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x^{1/2}) + 6\frac{1}{\sqrt{x}-3}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-3)$$

$$= 2\,\frac{1}{2}x^{-1/2} + 6\frac{1}{\sqrt{x}-3}\,\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\frac{1}{\sqrt{x}-3}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}-3}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x}}-\cancel{3}}{\sqrt{x}-3} + \frac{\cancel{3}}{\sqrt{x}-3}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}-3}.$$

- $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-\sqrt{2x-1}}\,dx$:

Sostituzione: $2x-1 =: t^2$

bisogno di $x = g(t)$ $\qquad x = \dfrac{t^2+1}{2} =: g(t)$.

$\qquad dx = g'(t)\,dt = t\,dt$

$$\int \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x-\sqrt{2x-1}}\,dx \underset{x=\frac{t^2+1}{2}}{=} \int \frac{\frac{t^2+1}{2}+\sqrt{t^2}}{\frac{t^2+1}{2}-\sqrt{t^2}}\,t\,dt$$

non dimenticare

$$= \int \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(t^2+1+2t)}{\cancel{\frac{1}{2}}(t^2+1-2t)}\,t\,dt = \int \frac{t^2+1+2t}{t^2+1-2t}\,t\,dt$$

$$= \int \frac{t^3+2t^2+t}{t^2-2t+1}\,dt \qquad \text{Integrale di una funzione razionale}$$

← capitolo su integrale funzioni razionali: Esercizio VII.

$$= \frac{t^2}{2} + 4t + 8\ln|t-1| - \frac{4}{t-1} + c \qquad t = \sqrt{2x-1}$$

$$= \frac{2x-1}{2} + 4\sqrt{2x-1} + 8\ln\left|\sqrt{2x-1}-1\right| - \frac{4}{\sqrt{2x-1}-1} + c.$$

6

- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$:

$1-x^2 =: t^2$?

$x^2 = 1-t^2 \qquad x = \sqrt{1-t^2} = g(t)$

$dx = \frac{1}{\cancel{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(-\cancel{2}t)\,dt$

$= -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int t \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt$$

$$= -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

forse più complicato del risultato con cui abbiamo cominciato!

Proviamo con un'altra sostituzione:

$\boxed{x = \operatorname{sen}(t)} \qquad dx = \cos(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\,\cos(t)\,dt$$

$$= \int \sqrt{\cos^2(t)}\,\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt$$

$\underset{\text{già visto, usando int. per parti}}{=} \frac{1}{2}\left(t + \operatorname{sen}(t)\cos(t)\right) + c$

$t = \operatorname{arcsen}(x)$

$$= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsen}(x) + \underbrace{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x))}_{=x}\ \underbrace{\cos(\operatorname{arcsen}(x))}_{=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(x))} = \sqrt{1-x^2}}\Big) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + c.$$

Integrazione per sostituzione per integrali definiti:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\,dx \qquad x = g(t)$$

$x = g(t), \quad dx = g'(t)\,dt, \quad x_0 = g(t_0), \ x_1 = g(t_1)$ non dimenticare ⚠

7

Esempio: $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$: $\qquad x = \operatorname{sen}(t)$

$x_0 = -1 = \operatorname{sen}(t_0)$

$t_0 = ?$

$t_0 = -\frac{\pi}{2}$

$x_1 = 1 = \operatorname{sen}(t_1)$

$t_1 = \frac{\pi}{2}.$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(t + \operatorname{sen}(t)\cos(t)\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Menti:

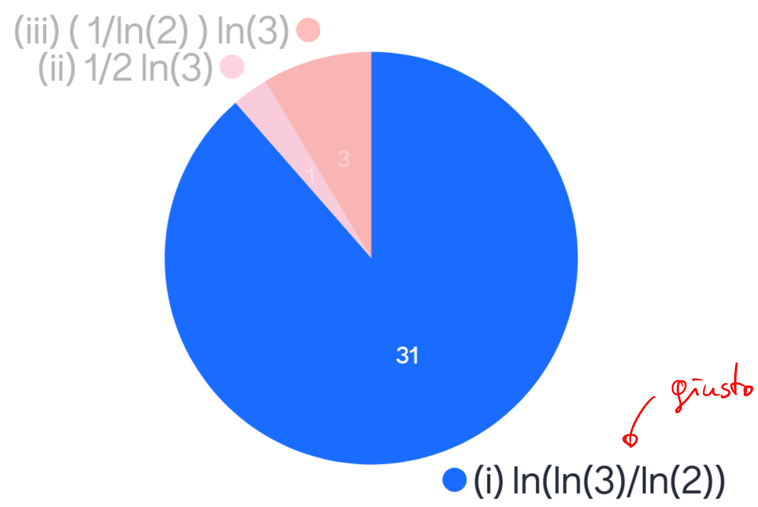
Qual'è l'integrale seguente?

$$\int_2^3 \frac{1}{x\log(x)}dx\,.$$

La soluzione è

(i) $\ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$, (ii) $\frac{1}{2}\ln(3)$, (iii) $\frac{1}{\ln(2)}\ln(3)$.

Risposte:



Soluzione del Meti:

Metodo 1: $\int \frac{1}{x\,\ln(x)}\,dx$ $t = \ln(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= e^t =: g(t) \\ dx &= g'(t)\,dt = e^t\,dt \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{e^t}\,t}\,\cancel{e^t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \ln|t| \qquad t = \ln(x)$$

$$= \ln|\ln(x)|$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \Big[\ln|\ln(x)|\Big]_{x_0=2}^{x_1=3} = \ln|\ln(3)| - \ln|\ln(2)|$$

$$= \ln\left|\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right| = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$$

$\ln(3) > 0$ e $\ln(2) > 0$.

Metodo 2: $\int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{t}\,dt$ $x_0 = 2 \rightsquigarrow t_0 = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} t_0 &= \ln(x_0) = \ln(2) \\ t_1 &= \ln(x_1) = \ln(3) \end{aligned}}$$

$$= \Big[\ln|t|\Big]_{t_0=\ln(2)}^{t_1=\ln(3)}$$

$$= \ln|\ln(3)| - \ln|\ln(2)| = \ln\left|\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right| = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right).$$

Soluzione Esercizio VII

Problema 1: (1) due radici coincidenti:

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$\Rightarrow$ radici:
$x_{1,2} = -1$
(due coincidenti)

$$\frac{1x + 0}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{Ax + (A+B)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow A = 1, \; B = -1.$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = A\int \frac{1}{x+1}\,dx + B\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+1| - \left(-\frac{1}{(x+1)}\right) + C$$

Controllo: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{d}{dx}(x+1)^{-1}$

$$= -(-1)(x+1)^{-2}\cdot 1 = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(2) Denominatore senza radici reali:

$$\int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx$$

Radici: $x^2 + 2x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 5}}{2} \qquad 4 - 45 < 0$$

$\Rightarrow$ radici non solo reali.

$$\frac{1-2x}{x^2+2x+5} = \frac{A\,(\text{derivata del denominatore}) + B}{x^2+2x+5}$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x+5) = 2x+2$$

$$= \frac{A(2x+2) + B}{x^2+2x+5}$$

$$1 - 2x = 2Ax + (2A+B) \quad \Rightarrow A = -1$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= 1 \\ -2 + B &= 1 \quad \Rightarrow B = 3. \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx = (-1)\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

"tipo funzione composta"

2

$$= -\ln|x^2+2x+5| + C + 3\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2+2x+5}_{(x+1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

Sostituzione: $y = \frac{x+1}{2}$, $x = 2y-1$, $dx = 2\,dy$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{y^2+1}\,2\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y) + C$$

$y = \frac{x+1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx = -\ln|x^2+2x+5| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Domanda: $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx \overset{?}{=} \ln|x+1|^2$

$$D\ln(|x+1|^2) = \frac{1}{|x+1|^2}\cdot 2(x+1)$$

$$D\ln(x^2+2x+5) = \frac{1}{x^2+2x+5}\cdot 2x$$

Attenzione!

(3) $\int \frac{t^3+2t^2+t}{t^2-2t+1}\,dt$ (a lezione maggio 13, (5)).

Divisione tra polinomi: (perché grado del numeratore > grado denominatore)

$$t^3+2t^2+t = (t^2-2t+1)(t+4) + 8t-4$$

$$\begin{array}{l} t^3+2t^2+t \\ -(t^3-2t^2+t) \\ \hline 4t^2 \\ -(4t^2-8t+4) \\ \hline +8t-4 \end{array}$$

$4(2t-1)$

$$\Rightarrow \int \frac{t^3+2t^2+t}{t^2-2t+1}\,dt = \underbrace{\int (t+4)\,dt}_{=\frac{1}{2}t^2+4t} + \int \frac{8t-4}{t^2-2t+1}\,dt$$

C'una radice doppia!

Come problema 1.(1).

3

$$\frac{8t-4}{t^2-2t+1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2}$$

$$8t-4 = A(t-1)+B = At + (B-A)$$

$\Rightarrow A = 8$ $\quad B-A = -4$

$B-8 = -4 \Rightarrow \boxed{B = 4}$

$$\Rightarrow \int \frac{8t-4}{t^2-2t+1}\,dt = 8\int \frac{1}{t-1}\,dt + 4\int \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$= 8\ln|t-1| + 4(-1)\frac{1}{t-1}$$

$$= 8\ln|t-1| - 4\frac{1}{t-1}.$$

$\frac{d}{dx}x^{-1} = -1x^{-2}$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = +\frac{1}{x^2}$

$-\int \frac{d}{dx}\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$= -\frac{1}{x}$

Controllo: $D\left(8\ln|t-1| - 4\frac{1}{t-1}\right)$

$$= 8\frac{1}{t-1} - 4D(t-1)^{-1}$$

$$= 8\frac{1}{t-1} - 4(-1)(t-1)^{-2}$$

$$= \frac{8}{t-1} + \frac{4}{(t-1)^2} = \frac{8(t-1)+4}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{8t-4}{(t-1)^2}.$$

$\boxed{\text{Problema 2:}}$ (1) Int. per parti, integrale definito:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Soluzione: Visto a lezione:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[\int f(x)g'(x)\,dx\right]_a^b = \left[f(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)\,dx\right]_a^b$$

$$= \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(4)

(2) Int. per sostituzione, integrale indefinito:

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int f(x)\, dx \Big|_{x=g(t)}.$$

Soluzione: Sia F una primitiva di f: $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(x)\, dx \Big|_{x=g(t)}\right) = \frac{d}{dt}\Big(F(g(t)) + C\Big)$$

$$= F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g'(t).$$

$\blacksquare$

(3) Int. per sost., integrale definito:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\, g'(t)\, dt = \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\, dx.$$

Dimostrazione:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(g(t))\, g'(t)\, dt = \Big[\int f(g(t))\, g'(t)\, dt\Big]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \Big[F(g(t))\Big]_{t_0}^{t_1} = \Big[F(x)\Big]_{g(t_0)}^{g(t_1)} = \Big[\int f(x)\, dx\Big]_{g(t_0)}^{g(t_1)}$$

$$= \int_{g(t_0)}^{g(t_1)} f(x)\, dx.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Problema 3:}}$

(Non facciamo tutti gli integrali, solo due di tre di ogni tipo.)

- $$\int \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^x}\, dx \overset{\text{Int. per parti}}{=} \underset{fg}{x e^x} - \underset{\int f'g}{\int e^x\, dx} = x e^x - e^x + C.$$

$f(x) = x$
$f'(x) = 1$
$g'(x) = e^x$
$g(x) = e^x$

- $$\int \frac{\ln(x)}{x^5}\, dx = \int \underset{f}{\ln(x)}\, \underset{g'}{x^{-5}}\, dx$$

$$= \underset{fg}{\ln(x)\left(-\tfrac{1}{4}x^{-4}\right)} - \underset{\int f'g}{\int \tfrac{1}{x}\left(-\tfrac{1}{4}x^{-4}\right) dx}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x)\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{x^5}\, dx}_{= -\frac{1}{4}x^{-4}} = -\frac{1}{4}\ln(x)\frac{1}{x^4} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^4} + C.$$

$f(x) = \ln(x)$
$f'(x) = 1/x$
$g'(x) = x^{-5}$
$g(x) = -\frac{1}{4}x^{-4}$

(5)

- $$\int \underset{f'}{2x}\, \underset{g}{\operatorname{arctg}(x)}\, dx$$

Derivata qui!

integrazione per parti

$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^2$
$g(x) = \operatorname{arctg}(x)$
$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$= \underset{fg}{x^2 \operatorname{arctg}(x)} - \underset{\int fg'\, dx}{\int x^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx}$$

$$= x^2 \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\, dx$$

$$= x^2 \operatorname{arctg}(x) - \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x^2 \operatorname{arctg}(x) - x + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}\, dx}_{= \operatorname{arctg}(x) + C}$$

$$= x^2 \operatorname{arctg}(x) - x + \operatorname{arctg}(x) + C.$$

[Controllo: $\frac{d}{dx}\left(x^2 \operatorname{arctg}(x) - x + \operatorname{arctg}(x)\right)$

$$= 2x \operatorname{arctg}(x) + x^2 \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x \operatorname{arctg}(x) + \underbrace{\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2}}_{=0} = 2x \operatorname{arctg}(x). \quad \checkmark$$
]

- $$\lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{kx+k}{x^3}\, dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\int_1^u \frac{kx+k}{x^3}\, dx = k\int_1^u \frac{x+1}{x^3}\, dx = k\int_1^u \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$= k\left(\Big[(-1)x^{-1}\Big]_1^u + \Big[\tfrac{1}{-2}x^{-2}\Big]_1^u\right)$$

$$= k\left(-\frac{1}{u} + 1 - \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{-2}\right) = k\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2}\right).$$

$$\lim_{u\to\infty} k\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2}\right) = k\,\frac{3}{2}.$$

- $$\int \operatorname{arcsen}(5x)\, dx$$

Sostituzione: $5x = y$
$x = \frac{1}{5}y$
$dx = \frac{1}{5}dy$

$$= \frac{1}{5}\int \underset{f}{\operatorname{arcsen}(y)}\, \underset{g'}{dy}$$

Int. per parti: $f(y) = \arcsin(y)$ $\quad g'(y) = 1$

$f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad g(y) = y$

$$= \frac{1}{5}\left(\arcsin(y)\, y - \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, y \, dy \right) \quad (*)$$

$$f\,g - \int f' g$$

per l'integrale $\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, y\, dy$: di nuovo sostituzione:

$t = y^2 \quad dt = \frac{d}{dy}(y^2)\, dy = 2y\, dy$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, dt = \frac{1}{2}\int (1-t)^{-1/2}\, dt$$

funzione composta

$$\int x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} x^{1/2} + c = 2x^{1/2} + c$$

fare il controllo!

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1/2}(1-t)^{1/2}\,(-1) + c$$

$$= -\sqrt{1-t} + c.$$

Sostituzione inversa: $t = y^2$

$$= -\sqrt{1-y^2} + c \quad \Rightarrow \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = -\sqrt{1-y^2} + c$$

inserire in $(*)$:

$$\frac{1}{5}\left(\arcsin(y)\, y + \sqrt{1-y^2} + c\right)$$

Sostituzione inversa: $y = 5x$

$$\Rightarrow \int \arcsin(5x)\, dx = \frac{1}{5}\left(\arcsin(5x)\, 5x + \sqrt{1-25x^2} + c\right).$$

- $\int x^2 e^{x^3}\, dx$: Sostituzione: $x^3 = y$

$dy = \frac{d}{dx}(x^3)\, dx = 3x^2\, dx$

$x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dy$

$$= \int e^y \, \frac{1}{3}\, dy$$

$$= \frac{1}{3} e^y = \frac{1}{3} e^{(x^3)}.$$

- $\int_2^{\pi/6} \frac{e^x}{1-e^x}\, dx$ $\quad y = 1 - e^x$ oppure $y = e^x$

$dy = \frac{d}{dx}(1-e^x)\, dx = -e^x\, dx$

$\Leftrightarrow e^x\, dx = -dy$

$$= -\int_{1-e^2}^{1-e^{\pi/6}} \frac{1}{y}\, dy$$

Estremi dell'intervallo di integrazione:

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = (1 - e^{x_0}) = (1-e^2)$

$x_1 = \pi/6 \Rightarrow y_1 = (1 - e^{\pi/6})$

$$= \left[-\ln|y|\right]_{1-e^2}^{1-e^{\pi/6}}$$

$$= -\ln|1-e^{\pi/6}| + \ln|1-e^2|$$

$$= \ln\left|\frac{1-e^2}{1-e^{\pi/6}}\right|$$

LEZIONE

Integrali impropri

Integrali su intervalli aperti alla destra o sinistra, o su intervalli non limitati.

Esempi: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ intervallo illimitato $[1, +\infty)$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ funzione definita solo su $(0,1]$

$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Definizione: Integrali impropri

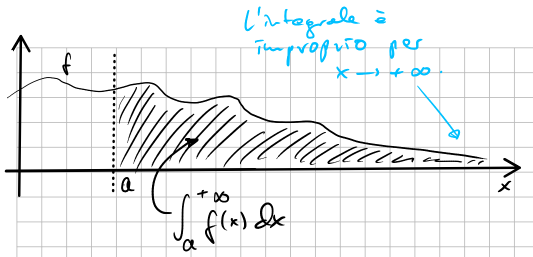
$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\, dx \qquad a \in \mathbb{R}$$

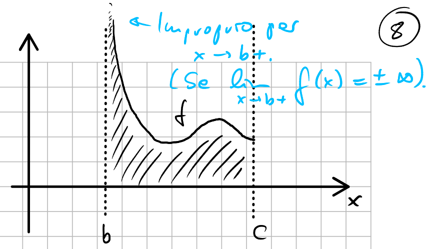
$$\int_b^c f(x)\, dx := \lim_{h \to b+} \int_h^c f(x)\, dx \qquad b, c \in \mathbb{R},\ b < c$$

se $\lim_{x \to b+} f(x) = \pm\infty$

Si dice: l'integrale improprio è convergente se il limite esiste, con valore finito! e divergente se il limite non esiste.

8





Esempi:

• $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M \to \infty} \left[-1 \cdot \frac{1}{x} \right]_1^M$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{M} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \lim_{M \to \infty} \left(1 - \frac{1}{M} \right) = 1.$$

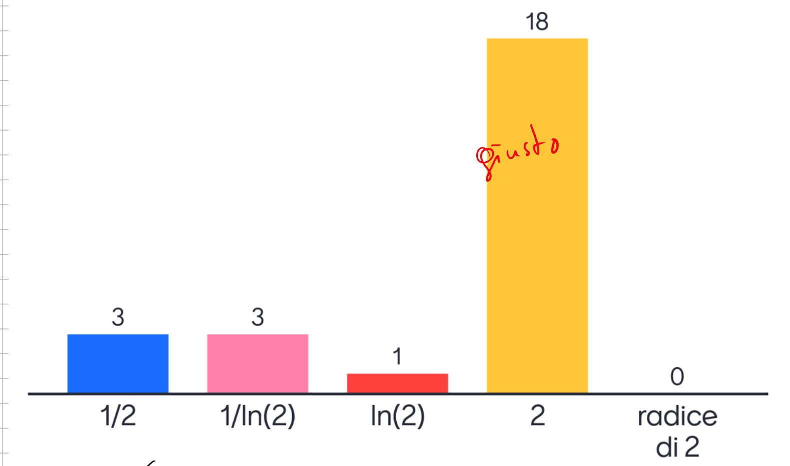
L'integrale improprio è convergente.

• $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \Big[\ln|x| \Big]_1^M = \lim_{M \to +\infty} \big(\ln(M) - 0 \big)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \ln(M) = +\infty.$$ L'integrale improprio è divergente.

Menti: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$ (in particolare $< +\infty$, allora convergente.)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow$ L'integrale è improprio per $x \to 0^+$.



Soluzione

9

<u>In generale:</u> (il menti era il caso $p = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_\varepsilon^1 \quad \text{per } p \neq 1$$

(per $p = 1$ attenzione: logaritmo!)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

per $p < 1$.

Invece per $p > 1$: non è convergente.

<u>Da ricordare:</u>

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} < +\infty & p < 1 \\ = +\infty & p \geq 1 \end{cases}$$

Per $x \to 0$, l'integrale è convergente se p è piccolo.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} = +\infty & p \leq 1 \\ < +\infty & p > 1. \end{cases}$$

Per $x \to +\infty$, l'integrale è convergente se p è grande.

1

Teorema: (Criterio del confronto)

Supponiamo che nel $[a, +\infty)$ risulti $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$. Attenzione!

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ è convergente, allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è convergente.

Se invece $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente, anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

[Senza dimostrazione a lezione.]

Esempio: L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente. Perché?

Scriviamo: $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{<+\infty} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\text{convergente o divergente?}}$$

(integrale normale di una funzione continua)

Osservazione: per $x \ge 1$: $e^{-x^2} \le x\, e^{-x^2}$ solo per $x \ge 1$ ⚠

crit. del confronto $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\right)\int_1^{\infty} (-2x)e^{-x^2}\,dx$

$-2x\,dx = dy$

Sostituzione: $y = -x^2$, $dy = -2x\,dx$; $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$, $x_1 = +\infty \Rightarrow y_1 = -\infty$.

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-\infty} e^{y}\,dy = -\frac{1}{2}\left[e^y\right]_{-1}^{-\infty} = \frac{1}{2}\Big(e^{-1} - \underbrace{\lim_{y\to-\infty} e^y}_{=0}\Big) = \frac{1}{2e} < +\infty.$$

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ è convergente.

[redacted]

2

Teorema: Sia f una funzione positiva, decrescente, (non dimenticare!) e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Poniamo $a_n := f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Allora la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Esempio: Il comportamento della $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2}$?

L'integrale associato è
$$\lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{1}{x \ln(x) (\ln(\ln(x)))^2}\,dx \quad \text{(integrale improprio).}$$

La funzione integranda è: positiva? Sì.
decrescente? Sì.
tende ad zero per $x \to +\infty$? Sì.

Per l'integrale è facile decidere usando sostituzione:

$t := \ln(\ln(x))$ $\quad dt = \frac{d}{dx}\ln(\ln(x))\,dx = \frac{1}{\ln(x)} \underbrace{\frac{d}{dx}\ln(x)}_{1/x}\,dx = \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$.

$x_0 = 2 \Rightarrow t_0 = \ln(\ln(2))$

$x_1 = M \Rightarrow t_1 = \ln(\ln(M))$

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln(x) (\ln(\ln(x)))^2}\,dx = \int_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(M))} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(\ln(2))}^{\ln(\ln(M))}$$

$$= -\frac{1}{\ln(\ln(M))} + \frac{1}{\ln(\ln(2))}$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)(\ln(\ln(x)))^2}\,dx = \frac{1}{\ln(\ln(2))} < +\infty.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2} < +\infty. \quad \text{Convergente.}$$

[redacted]

Dimostrazione: Siccome f è decrescente:

$$f(n+1) \le f(x) \le f(n) \qquad \forall x \in [n, n+1].$$

Allora
$$\underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1)\, dx}_{} \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le \underbrace{\int_n^{n+1} f(n)\, dx}_{= f(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$= f(n+1) \int_n^{n+1} 1\, dx$$

$$= f(n+1)\big((n+1)-n\big) = f(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\, dx \le f(n).$$

Allora
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \ge \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\, dx$$

$$= \int_{n_0}^{n_0+1} f(x)\, dx + \int_{n_0+1}^{n_0+2} f(x)\, dx + \int_{n_0+2}^{n_0+3} f(x)\, dx + \dots = \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \ge \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

In particolare: $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = +\infty$.

Abbiamo anche

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=n_0-1}^{\infty} f(n+1) \le \sum_{n=n_0-1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\, dx = \int_{n_0-1}^{\infty} f(x)\, dx.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \le \underbrace{\int_{n_0-1}^{n_0} f(x)\, dx}_{} + \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

un integrale normale (intervallo chiuso e limitato), allora un numero finito.

$\Rightarrow$ Se $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, anche $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$.

$\blacksquare$

Formula di Taylor

Teorema: (formula di Taylor con il resto integrale) Sia $n \in \mathbb{N}$. Sia f derivabile $n+1$ volte in $[a,b]$, e sia la $(n+1)$-esima derivata $f^{(n+1)}$ continua, e sia $x_0 \in [a,b]$. Allora

(*) $$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

con il polinomio di Taylor di grado n

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e la funzione resto $$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

⚠ **Notazione:** $f^{(n+1)}(x) = (n+1)$-esima derivata (con parentesi!)

per esempio: $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(5)}(x) = f'''''(x)$.

Dimostrazione: Usiamo induzione su $n \in \mathbb{N}$.

$n=0$: (*) diventa: $f(x) = p_0(x) + R_0(x)$ $\quad p_0(x) = f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt. \qquad R_0(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

È esattamente la formula fondamentale del calcolo integrale, allora è vero.

Supponiamo (*) è vero per $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$.

Dimostriamo che è vero per $n+1$: Usando integrazione per parti:

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{=:\, g'(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=:\, h(t)}\, dt = \Big[g(t)h(t)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} g(t)h'(t)\, dt$$

pensare di una funzione dipendente da t

$$= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\, n!} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} - \underbrace{\int \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\, n!}\right) f^{(n+2)}(t)\, dt}_{}$$

$(n+1)n! = (n+1)!$

$$= \underbrace{-\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)}_{=0} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x)$$

$x - x = 0$

$$\Longrightarrow \quad R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x).$$

inserire qui

Induzione: (usiamo (*) per n) $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$

$$= \underbrace{p_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)}_{= p_{n+1}(x)} + R_{n+1}(x)$$

$\Rightarrow f(x) = p_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$. Abbiamo dimostrato (*) per $n+1$.

Esempio: $f(x) = e^x$,

polinomio di Taylor di grado n nel punto $x_0 = 0$:

$$p_n(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$(0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3,\ 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4, \dots)$

$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 1,\ f'''(0) = 1$

$$\Rightarrow p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

__Il resto:__ Sia x fisso.

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{= e^t} dt \right| \le \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} e^t\, dt$$

$t \in [0,x] \Rightarrow t < x$

$$\le \int_0^x \frac{(x+t)^n}{n!} e^t\, dt \le \int_0^x \frac{(2x)^n}{n!} e^x\, dt = \frac{(2x)^n}{n!} e^x \underbrace{\int_0^x dt}_{=x}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \le \frac{(2x)^n}{n!} e^x x \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty \ (x \text{ fisso}).$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$ __la serie esponenziale__

__Altri esempi importanti:__

da sapere a memoria

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

senza fattoriale

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

> **Definizione:** "o piccolo" — "o" come "ordine"
>
> Per due funzioni f, g si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$
>
> se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Normalmente usato solo se $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Esempio: $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$

$\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = o(x^4)$ per $x \to 0$.

Perché? $\frac{1}{5!}x^5 = o(x^4)$ per $x \to 0$ $\iff \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5!}x^5}{x^4} = 0$

È vero? $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{5!}x^5}{x^4} = \frac{1}{5!} \lim_{x\to 0} x = 0$. Sì.

$$\boxed{\Rightarrow \operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)}$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^6).$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8).$$

__Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti:__

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} \right)$ "forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$"

$\frac{1}{x^2} \to +\infty, \quad \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} \to +\infty.$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2 \operatorname{sen}(x)} \right)$$

ancora una forma indeterminata

Usiamo Taylor: $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$:

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \cancel{-x}}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^4)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)}\right) \qquad \begin{matrix} 1 : x^3 \\ 1 : x^3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{x^3}\, o(x^4) = o(x) \\ x^2\, o(x^4) = o(x^6) \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{6} + o(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\right)$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6} + o(x)\right)}{\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)} = \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6}$$

Domanda: se uso solo $\sin(x) = x + o(x^2)$?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x + o(x^2) - x}{x^2\,(x + o(x^2))}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{o(x^2)}{x^3 + o(x^4)}\right)$$

Ancora una forma indeterminata del tipo "$\frac{0}{0}$" (pensiamo di $o(x^2) \longrightarrow 0$ e $x^3 \longrightarrow 0$!).

Allora $\sin(x) = x + o(x^2)$ non è sufficiente per decidere.

Se uso $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)$?

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7) \cancel{-x}}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)}{x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{5!} + o(x^9)}\right) \qquad \begin{matrix} 1 : x^3 \\ 1 : x^3 \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{5!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + o(x^6)}\right) \qquad \text{adesso è una forma determinata!}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6}}{1} = -\frac{1}{6}.$$

Il risultato rimane giusto, ma abbiamo lavorato di più.

Il metodo usando Taylor è molto utile per limiti con funzioni composti, per esempio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(x))}{x^2} \qquad \left(\text{tipo pure: } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"}\right). \longrightarrow \text{Esercizio.}$$

— Fine materiale per esame 30 maggio (Ma esercizio incluso!) —

Soluzione Esercizio VIII

Problema 1: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\,dx$

Improprio in $x = 1$ e in $x = 0$.

↳ tagliare in 2 pezzi, a un punto x_0, per esempio $x_0 = 1/2$.

$$= \lim_{h\to 0^+}\int_h^{1/2}\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}\,\sqrt{x}}\,dx$$

oppure $\displaystyle\lim_{\delta\to 1^-}\int_{1/2}^{\delta}(\ldots)\,dx$

$$= \lim_{h\to 0^+}\int_h^{1/2}\frac{\cancel{\sqrt{1-x}}}{2\cancel{\sqrt{1-x}}\sqrt{x}}\,dx - \lim_{h\to 0^+}\int_h^{1/2}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-x}\cancel{\sqrt{x}}}\,dx$$
$$+ \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{\cancel{\sqrt{1-x}}}{2\cancel{\sqrt{1-x}}\sqrt{x}}\,dx - \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-x}\cancel{\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0^+}\int_h^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - \lim_{h\to 0^+}\int_h^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx + \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - \lim_{\delta\to 0^+}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\int x^{-1/2}\,dx = 2x^{1/2} \\ \int (1-x)^{-1/2}\,dx = -2(1-x)^{1/2}.\end{array}\right.$$

$= 0$. (In particolare, è convergente.)

$$\int_{1/2}^1 \frac{e^{-\cos(x)}}{\sqrt{1-x}}\,dx: \qquad -1 \le \cos(x) \le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow e^{-1} \le e^{-\cos(x)} \le e \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Criterio del confronto:

$$\int_{1/2}^1 \frac{e^{-\cos(x)}}{\sqrt{1-x}}\,dx \le \int_{1/2}^1 \frac{e}{\sqrt{1-x}} = e\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

Sostituzione: $y := 1-x$, $dy = -dx$, $x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 0$.

$$= e\int_{1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{y}}(-1)\,dy = e\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy < +\infty.$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{y^p}\,dy < +\infty$ se e solo se $p < 1$

$y = 1-x$

$dy = \frac{d}{dx}(1-x)\,dx = -dx$.

Problema 2: (1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^p}$. Usiamo il criterio dell'integrale:

Serie è convergente se e solo se $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx$ è convergente.

$$\int_2^M \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{1}{x(\ln(x))^p}\,dx$$

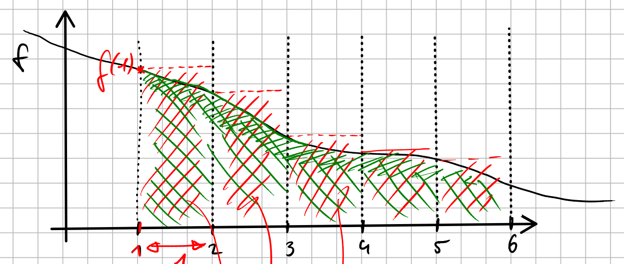
Sostituzione: $y := \ln(x)$ $\quad dy = \frac{\partial}{\partial x}(\ln(x))\, dx = \frac{1}{x} dx$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \ln(x_0) = \ln(2)$

$x_1 = M \Rightarrow y_1 = \ln(M)$

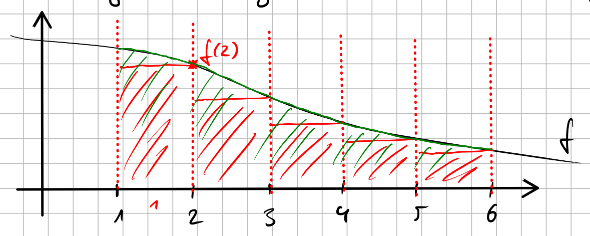
$$= \lim_{M\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(M)} \frac{1}{y^p}\, dy = \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{y^p}\, dy$$ converge se e solo se $p > 1$.

(2) Dimostrazione del Criterio dell' integrale:



$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\cdot 1}_{\text{area del rettangolo}} \quad n=1 \quad n=2 \quad n=3 \qquad \geq \qquad \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

Se l'integrale diverge, anche la serie diverge.



$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)\cdot 1 \leq \int_1^{\infty} f(x)\, dx < +\infty$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

Se l'integrale converge, anche la serie converge.

$\boxed{\text{Problema 3:}}$ **formula di Taylor**

(1) $n=4$, $x_0 = 0$, $f(x) = \cos(x)$.

$$\cos(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

Derivate:
$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f'''(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}\right\}$$ per il polinomio di Taylor

per il resto: $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$ non solo nel punto $x=0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \underbrace{\sin(t)}_{f^{(5)}(t)}\, dt$$ nel punto t!

(2) Dimostrare Taylor:

Taylor: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)\, f''(t)\, dt$.

$$\underset{\text{ipotesi}}{0} = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)\, f''(t)\, dt \right)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_0-x_0)}_{=0} + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0}(x_0-t)\, f''(t)\, dt}_{=0} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$
$$= f(x_0)$$

$\Rightarrow f(x_0) = 0$.

$\Rightarrow$ Taylor: $f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)\, f''(t)\, dt$.

Allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)\, f''(t)\, dt}{g'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)\, g''(t)\, dt} \quad \begin{matrix} |:(x-x_0) \\ |:(x-x_0) \end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0}(x-t)\, f''(t)\, dt}{g'(x_0) + \frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0}(x-t)\, g''(t)\, dt}.$$

Se possiamo dimostrare $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_x^{x_0} (x-t) f''(t)\, dt = 0$ (*)

troviamo: $= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ L'Hôpital ✓. $\left(= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right.$ perchè f', g' solo continue $\left. \right)$

Come dimostrare (*)?

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt - \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (x_0 - t) f''(t)\, dt + \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (x_0 - t) f''(t)\, dt \right)$$

inserito uno zero

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\cancel{\frac{1}{x-x_0}} \int_{x_0}^{x} \cancel{((x-t)-(x_0-t))} f''(t)\, dt \right) + \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (x_0 - t) f''(t)\, dt$$

$$= \lim_{x \to x_0} \int_{x_0}^{x} f''(t)\, dt + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 - t) f''(t)\, dt}$$

formula fondamentale del calcolo integrale

$$= (x_0 - t) f''(t) \Big|_{t = x_0} = 0.$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[f'(t) \right]_{x_0}^{x}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(f'(x) - f'(x_0) \right)$$

$$= 0.$$

$\blacksquare$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

Visto a lezione:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^{2.5})$$

Perchè $o(y^{2.5})$ e non $o(y^3)$?

Ricordiamo: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$

$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$y^3 = o(y^3)$? $\lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1$

$y^3 = o(y^{2.5})$? $\lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^{2.5}} = \lim_{y \to 0} y^{1/2} = \lim_{y \to 0} \sqrt{y} = 0$

$$\ln(\cos(x)) = \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{x^2}{2!} + o(x^3)}_{=:\, y}\Big)$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + o(y^{2.5})$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right)^2 + o\left(\underbrace{(x^2)^{2.5}}_{x^{2 \cdot \frac{5}{2}} = x^5} \right)$$

$$= -\frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2} + o(x) \right) = -\frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

$o(x^4)$ assorbe tutti i termini x^m con $m > 4$ (per $x \to 0$)

Esempio: $o\left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right)^{5/2} \right) = o\left(\left(o(x^{1.9}) \right)^{5/2} \right)$

$= o\left(x^{1.9 \cdot \frac{5}{2}} \right) = o(x^3)$

(oppure anche x^4)

$x^2 = o(x^2)$ non è vero!

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0$

$x^2 = o(x^{1.9})$ è vero:

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^{1.9}} = \lim_{x \to 0} x^{0.1} = 0$

---

(4) $\longrightarrow$ libro pagina 252.

1

Equazioni differenziali e la pandemia

Equ. diff.: "una relazione tra una funzione e le sue derivate".

$\boxed{\text{Esempio:}}$ $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Per risolvere l'equazione diff. dobbiamo cercare la funzione f.

$$f' = f.$$

Altri esempi:

$f'' = -f$

$f = (f')^2$

$f = f' \cdot \sqrt{f''}$

- Proviamo con $f(x) = \operatorname{sen}(x)$? $\quad f'(x) = \cos(x)$.

  Non è una soluzione: ci sono tanti $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) \neq \operatorname{sen}(x)$.
- $f(x) = e^x$? $\quad f'(x) = e^x$: $\quad e^x = e^x$ ovviamente vero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

  $\Rightarrow e^x$ è una soluzione.

In generale, ci sono tante soluzioni!

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^{x-a}, \quad a \in \mathbb{R} \\ f'(x) = e^{x-a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{per ogni } a \in \mathbb{R} \text{ trovo un'altra soluzione di } f' = f.$$

(Tutte le soluzioni sono di questo tipo, ma per dimostrarlo serve più teoria.)

Per scegliere una soluzione unica dobbiamo fissare il valore a un certo punto: per esempio chiediamo $f(0) = 1$.

$$1 = f(0) = e^{0-a} \iff -a = \ln(1) = 0 \iff a = 0.$$

un problema ai valori iniziali $\begin{cases} f = f' \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$

La pandemia:

Per corona: $R_0 = 3$: ogni persona infettata infetta 3 altri.

(senza lockdown)

(per Morbillo senza vaccinazione: $R_0 = 18$!)

Allora la crescita (la derivata) del numero di casi è uguale 3 volte il numero di

2

casi: $f' = 3f$.

La soluzione è $f(t) = e^{3t-a}$

Se cominciamo il giorno $t = 0$ con una persona:

$$1 = f(0) = e^{-a} \Rightarrow a = 0.$$

numero di casi diventa: $e^{3t} = f(t)$.

giorno	0	1	2	3	4	5	6
casi	1	$e^3 \approx 20$	e^6	8100	162 754	...	65 milioni

non realistico

Proviamo con: $f' = R_0 f(N - f)$ $\quad$ N = numero di abitanti = 60 milioni

$f(0) = 1$.

Se quasi tutta la popolazione è infettata, $N - f \approx 0$, e f non cresce più (derivata $f' \approx 0$).

Soluzione: (indovinato)

$$f(t) = \frac{N e^{R_0 N t}}{N + e^{R_0 N t} - 1}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{N}{\underbrace{N e^{-R_0 N t}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{e^{-R_0 N t}}_{\to 0}} = N$$

Con guariti: 3 funzioni:

$S(t)$ = numero di persone suscettibili

$I(t)$ = " " infettati

$G(t)$ = " " guariti (e immune)

$$N = S(t) + I(t) + G(t).$$

Sistema di equazioni differenziali:

per risolverlo dobbiamo trovare 3 funzioni compatibili!

$$S'(t) = -R_0 S(t) I(t) \qquad S(0) = N - 1$$

$$I'(t) = R_0 S(t) I(t) - \gamma I(t) \qquad I(0) = 1$$

$$G'(t) = \gamma I(t) \qquad G(0) = 0$$

infezioni

γ = parametro = probabilità per guarirsi in un giorno

Non lo possiamo risolvere $\rightarrow$ usiamo una simulazione.

Algoritmo di Euler per la simulazione:

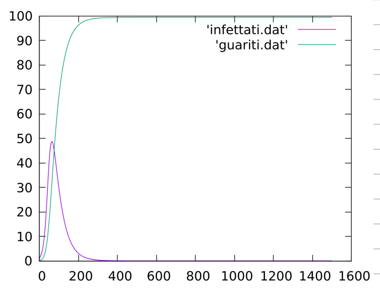
per esempio: $\Delta t = 1$ giorno

un passo di tempo: $I(t+\Delta t) := I(t) + \Delta t \cdot I'(t)$

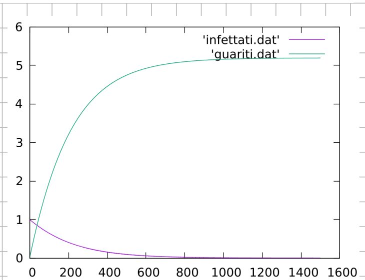
$$I'(t) = R_0 S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$S(t+\Delta t) = S(t) + \Delta t \cdot S'(t)$$
$$G(t+\Delta t) = G(t) + \Delta t \cdot G'(t)$$

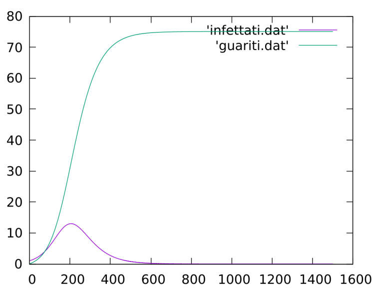
e iterare. (⟶ link per Khan Academy su Ariel)



← per $R_0 = 3$: al "peak" della pandemia 50% della popolazione sono malati! La pandemia finisce quando 100% hanno preso il virus e sono guariti.



← per $R_0 = 0.5$ (dal primo giorno) il virus si ferma senza causare un'epidemia.



← per $R_0 = 1.1$: al "peak" ci sono 12% della popolazione infettati (#flattenthecurve) e la pandemia si ferma quando circa 75% hanno preso il virus e sono guariti (25% non prendono mai il virus — immunità di gregge!)

```c
int steps = (int) (TMAX / DT);
for (int i =0; i < steps; i++) {
    INew = IOld + DT*(  RZERO*IOld*(NTOTAL - IOld - GOld) - GAMMA*IOld  );
    GNew = GOld + DT*(  GAMMA*IOld  );

    fprintf(file1,"%.10lf\n", INew);
    fprintf(file2,"%.10lf\n", GNew);

    IOld = INew;
    GOld = GNew;
    }
system("gnuplot -p 'script.gp'");
```

script.gp

```
plot 'infettati.dat' with lines, 'guariti.dat' with lines
```

Ex. 43 Un prolungamento continuo esiste se e solo se

(1)

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) \quad (\text{e non è } \pm\infty).$$

Limite sinistro: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{\frac{a}{x}}$.

Ci sono tre possibilità:

$$\boxed{\begin{array}{l} (1)\ \text{Se } a>0:\ \frac{a}{x} \longrightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} \longrightarrow 0. \\ (2)\ \text{Se } a=0:\ \frac{a}{x} = 0 \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} = 1. \end{array}}$$

(3) Se $a<0$: $\frac{a}{x} \longrightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{a}{x}} \longrightarrow +\infty$.

Per il caso (3) non esiste un prolungamento continuo.

Limite destro: $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^b)}{x e^a} = \frac{1}{e^a} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^b)}{x}$.

Tre possibilità:

(1) $b<0$: $x^b = \frac{1}{x^{|b|}} \xrightarrow[(x\to 0+)]{} +\infty \Rightarrow \ln(1+x^b) \longrightarrow +\infty$.

$\Rightarrow \frac{\ln(1+x^b)}{x} \longrightarrow +\infty$.

Non esiste un prolungamento continuo.

(2) $b=0$: $x^0 = 1$, $\frac{\ln(1+1)}{x} = \frac{\ln(2)}{x} \xrightarrow[(x\to 0+)]{} +\infty$.

Non esiste un prolungamento continuo.

(3) $b>0$: "$\frac{0}{0}$". Usiamo Taylor:

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots = y + o(y^{1.9})$$

$$\Rightarrow \ln(1+x^b) = x^b + o((x^b)^{1.9}) = x^b + o(x^{1.9b})$$

$$\frac{\ln(1+x^b)}{x} = x^{b-1} + o(x^{1.9b-1})$$

(i) per $b<1$: $x^{b-1} \longrightarrow +\infty$

non esiste un prolungamento continuo.

$$\boxed{\begin{array}{l} (ii)\ \text{per } b=1:\ \frac{\ln(1+x^b)}{x} = 1 + o(x^{0.9b}) \longrightarrow 1 \\ (iii)\ \text{per } b>1:\ \frac{\ln(1+x^b)}{x} = x^{b-1} + o(x^{1.9b-1}) \longrightarrow 0. \end{array}}$$

(2)

lim sinistro		lim destro	
$a>0$:	$=0$	$b=1$:	$\frac{1}{e^a}$
$a=0$:	$=1$	$b>1$:	0.

- $a>0$ con $b=1$: $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{e^a} \neq 0$.

  Non esiste un prolungamento continuo.

- $a>0$ con $b>1$: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$.

  Se poniamo $f(0) := 0$, abbiamo trovato un prolungamento continuo.

- $a=0$ con $b=1$: $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{e^a}\Big|_{a=0} = \frac{1}{1} = 1$.

  Se poniamo $f(0) := 1$, abbiamo costruito un prolungamento continuo.

- $a=0$ con $b>1$: $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$

  Non esiste un prolungamento continuo.

$\Rightarrow$ Un prolung. continuo esiste se e solo se

- $a>0$ e $b>1$

oppure

- $a=0$ e $b=1$.

l'Hopital invece di Taylor? per $b>1$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^b)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+x^b}\cdot b x^{b-1}}{1} = \lim_{x\to 0+} b\,\frac{x^{b-1}}{1+x^b}$$

$x^{b-1} \to 0$, $x^b \to 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0+} b\,\frac{x^{b-1}}{1+x^b} = 0$. ✓

(3)

oppure usando un limite notevole:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x^b)}{x} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{\ln(1+x^b)}{x^b}}_{\substack{\text{limite notevole:}\\ \to 1}} \cdot \frac{x^b}{x}$$

vincere: $\to 0$ per $b>1$.

Domanda: Continuità della funzione $f(x) = \ln(x)$?

Dominio: $(0, +\infty)$

La funzione è continua in tutto il dominio.

Qual'è $\lim_{x\to 0-} \ln(x)$? Domanda non possibile.

Asintoto verticale nel punto $x=0$? Sì, $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

La funzione è continua nel punto $x=0$?

La domanda non ha senso perché $x=0$ non è nel dominio. Non si può dire continua o discontinua fuori dal dominio!

Esiste un prolungamento continuo in $x=0$? Questa domanda è possibile, ma la risposta è no perché $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$.

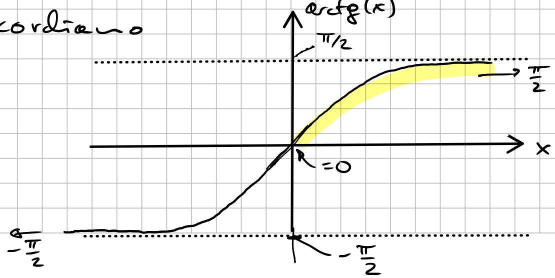
(Allora limite destro non esiste, $-\infty \notin \mathbb{R}$, la funzione diverge.)

Ex. 44 $h(x) = \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Dominio? $\arctg(x)$ è definita per tutti $x \in \mathbb{R}$.

Allora il dominio di $h(x)$ è $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Limiti? Ricordiamo



(4)

$x \to +\infty$
$z = \frac{1}{x^2} \to 0+$

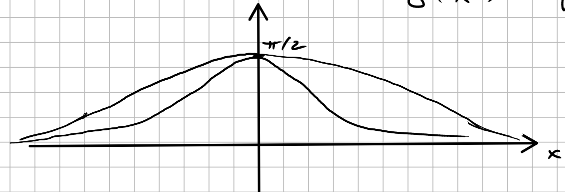
- $\lim_{x\to+\infty} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) \overset{z=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{z\to 0+} \arctg(z) = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z\to 0+} \arctg(z) = 0$,
- $\lim_{x\to 0+} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z\to+\infty} \arctg(z) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to 0-} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{z\to+\infty} \arctg(z) = +\frac{\pi}{2}$.

Prolungamento continuo nel punto $x=0$?

$\lim_{x\to 0} \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$

Sì, esiste con $h(0) := \frac{\pi}{2}$.

Grafico qualitativo:
- $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) > 0$.
- $x^2 = (-x)^2 \Rightarrow \arctg\left(\frac{1}{x^2}\right)$ è pari.



- derivabile + continua

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\frac{d}{dx}(x^{-2}) = \frac{x^4}{x^4+1}(-2)x^{-3}$$
$$= -2\frac{x}{x^4+1}$$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e ovviamente un massimo.

Ex. 62 $g(x) = e^{-x}(\ln(-x) - 1)$ grafico qualitativo?

Dominio: $x < 0$, allora $(-\infty, 0)$.

Punti particolari: intersezione con asse x:

$e^{-x}(\ln(-x) - 1) = 0 \quad | \cdot e^x$

$\Leftrightarrow \ln(-x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(-x) = 1$

$\Leftrightarrow -x = e^1 = e \quad \Leftrightarrow \boxed{x = -e}$

Limiti: $\bullet \lim_{x \to -\infty} e^{-x}(\ln(-x)-1)$

$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{x}}_{\to +\infty}(\underbrace{\ln(x)-1}_{\to +\infty}) = +\infty$

$\bullet \lim_{x \to 0^-} \underbrace{e^{-x}}_{\to 1}(\underbrace{\ln(-x)-1}_{\to -\infty}) = -\infty.$

Minimi e massimi? $g'(x) = \frac{d}{dx}(e^{-x})(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln(-x)-1)$

$= -e^{-x}(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{1}{-x}(-1)$

$= -e^{-x}(\ln(-x)-1) + e^{-x}\frac{1}{x}.$

$g'(x) = 0$? $\quad -(\ln(-x)-1) + \frac{1}{x} = 0.$

$\iff \quad 1 + \frac{1}{x} = \ln(-x).$

Una soluzione: $\boxed{x = -1.}$ (indovinare!)

$g(-1) = e^{-x}(\ln(-x)-1)\big|_{x=-1} = e(\underbrace{\ln(1)}_{=0}-1) = -e.$

$\rightarrow$ retta tangente orizzontale nel punto $x=-1$, $y=-e$.

È un minimo o un massimo?

$g(x) = e^{-x}(\ln(-x)-1)$

(1) $\ln(x)$ è strett. crescente $\left(\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} > 0\right)$

$\Rightarrow \ln(-x)$ è strettamente decrescente.

(2) e^x è strett. crescente $\left(\frac{d}{dx}e^x = e^x > 0\right)$.

$\Rightarrow e^{-x}$ è strett. decrescente.

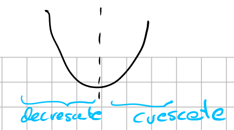
[f_1, f_2 strett. decrescente e positive $\Rightarrow f_1 f_2$ strett. decrescente]

[Dimostrazione: $\frac{d}{dx}(f_1 \cdot f_2) = \underbrace{f_1'}_{<0}\underbrace{f_2}_{>0} + \underbrace{f_1}_{>0}\underbrace{f_2'}_{<0} < 0$

$\Rightarrow f_1 \cdot f_2$ strett. decrescente]

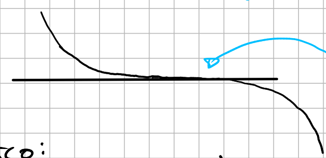
$\Rightarrow g(x)$ è strett. decrescente, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Minimo



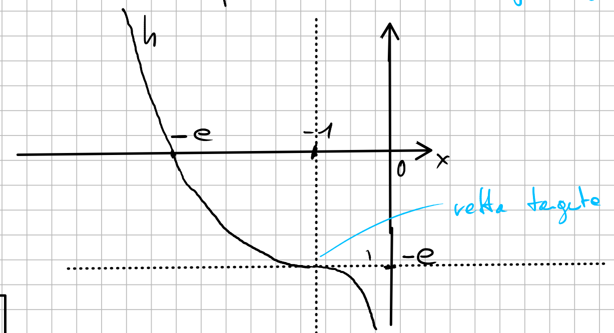
Una funzione decrescente non può avere un minimo o un massimo.

$\Rightarrow$



retta tangente orizzontale senza minimo o massimo (funzione è sempre decrescente).

Grafico:



Come dimostrato, la funzione è sempre decrescente, allora non può avere minimi o massimi.

$\boxed{\text{Ex. 63 (2)}}$

$f(x) = |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3.$

⚠ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2-\frac{1}{2}x^3 & \text{se } x \in [-1,1] \\ x^2-1-\frac{1}{2}x^3 & \text{se } x \notin [-1,1] \end{cases}$

attenzione: valore assoluto!

0) <u>dominio:</u> $\mathbb{R}$.

1) <u>Simmetrie, intersezione assi?</u>

$f(-x) = |(-x)^2-1| - \frac{1}{2}(-x)^3 = |x^2-1| + \frac{1}{2}x^3$

$f(x) = |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3.$ $\quad$ né pari, né dispari.

$f(x) = 0$? $\quad$ <u>per $x \in [-1,1]$:</u> $\quad x^2 \leq 1$

$f(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3$ $\quad$ difficile da trovare.

~~$f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{8}$~~

<u>per $x \notin [-1,1]$:</u> $\quad x^2 > 1$

$f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^3$

$f(2) = 4 - 1 - \frac{1}{2}8 = -1$

$f(-2) = 4 - 1 + \frac{1}{2}8 = 7.$

stesso problema, difficile da trovare

Con l'asse y? $f(0) = |0-1| - \frac{1}{2}0^3 = |-1| = 1.$

(7)

2) asintoti: verticale: non esistono

orizzontale: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3 = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} |x^2-1| - \frac{1}{2}x^3 = +\infty.$

3) crescenza, decrescenza, min, max?

$\boxed{\text{Studiamo prima } x < -1:}$ $f(x) = x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^3.$

$f'(x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 = x\left(2 - \frac{3}{2}x\right)$

$f'(0) = 0$ ma $0 \nless -1$ non rilevante

$2 - \frac{3}{2}x = 0 \iff 2 = \frac{3}{2}x \iff x = \frac{4}{3} \nless -1.$

Allora per $x < -1$ non ci sono minimi, massimi.

Per $x \to -\infty$, abbiamo $f(x) \to +\infty$. Allora la funzione è decrescente. Siccome mai $f'(x) = 0$, allora la derivata deve rimanere negativa. (Teorema dell'esistenza degli zeri!)

$\Rightarrow f$ è decrescente per tutti valori di $x < -1$.

$\boxed{\text{per } x > 1:}$ come per $x < -1$; adesso $x = \frac{4}{3}$ è permesso.

È un minimo o un massimo?

$f''(x) = 2 - 3x$ $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 2 - 3\frac{4}{3} = -2 \Rightarrow$ un massimo.

Valore del massimo: $f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3$

$= \frac{16\cdot 3}{3^3} - \frac{3^3}{3^3} - \frac{1}{2}\frac{64}{3^3}$

$= \frac{48 - 27 - 32}{27} = -\frac{11}{27} > -\frac{11}{22} = -\frac{1}{2}.$

$\boxed{\text{Massimo: } x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{11}{27} > -\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{per } -1 < x < 1:}$ $f(x) = 1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = -2x - \frac{3}{2}x^2 = -x\left(2 + \frac{3}{2}x\right)$

$f'(0) = 0$ $f'\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$ ma $-\frac{4}{3} \notin (-1, 1).$ (non rilevante)

(8)

$x = 0$ è un minimo o un massimo?

$f''(x) = -2 - 3x$ $f''(0) = -2 \Rightarrow$ un massimo.

Valore del massimo abbiamo già calcolato:

$f(0) = 1.$

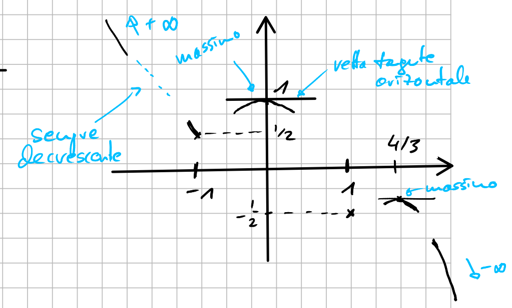
$\boxed{\text{Massimo } x = 0,\ y = 1}$

$\boxed{\text{Punti in cui la funzione non è derivabile:}}$

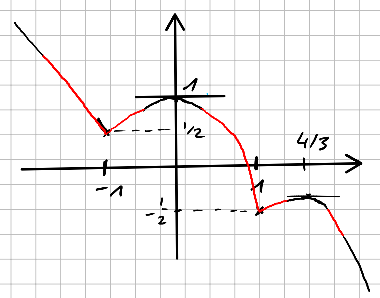
$x = -1$: $f(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^3 = \frac{1}{2}.$

$x = 1$: $f(1) = -\frac{1}{2}.$

Informazione a questo punto:



completare il grafico senza introdurre altri minimi/massimi:



$\Rightarrow$ i punti non derivabili

$x = -1,\ y = \frac{1}{2}$

e

$x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$

devono essere minimi!

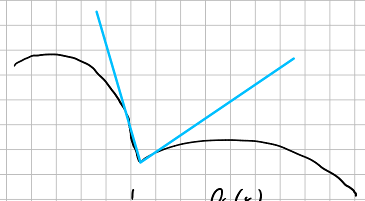
$\Rightarrow$ **Massimi:** • $x = 0,\ y = 1$ • $x = \frac{4}{3},\ y = -\frac{11}{27}$ **Minimi:** • $x = -1,\ y = \frac{1}{2}$ • $x = 1,\ y = -\frac{1}{2}$

trovato usando teorema di Fermat

non possibile trovare con Fermat (la funzione non è derivabile in $x = \pm 1$)

4) <u>convessità, concavità, punti di flesso:</u> calcolare $f''(x)$ per $x \neq -1$ e $x \neq +1$. ⑨

5) <u>asintoti obliqui?</u> interessante anche: le rette tangente alla sinistra e alla destra del punto non derivabile:



$\boxed{\text{Ex. 66 (2)}}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln(x)}$, usando $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Abbiamo $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$; allora usiamo $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \dots$

$$= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0.$$

$y = \frac{\ln(x)}{x}$

$$\frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}\left(\cancel{1} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right) - \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{x}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)\right)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0} + \underbrace{o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}_{\to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = 1.$$

Infatti, possiamo anche usare solo $e^y = 1 + y + o(y)$, per $y \to 0$:

$$\Rightarrow \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1)}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)$$ con "o piccolo" per $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$

$$= 1 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}$$

funzione $= o(1)$ qui vuol dire: $\frac{\text{funzione}}{1} \to 0$ per $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$

(definizione di "o piccolo"!)

(Qui, l'ordine non banale di Taylor è "y" $1 + y$; invece il termine "1" cancella e così non è sufficiente.)