Wie Mathematik Staus verhindert I: Das Optimale Tempolimit für den Stadtverkehr

Prof. Dr. Niels Benedikter
Abteilung für Mathematik
Universität Mailand

27. November 2023

Zusammenfassung

Städte leiden unter Verkehrsstaus. Wie können Verwaltungen Staus verringern oder verhindern? Wir untersuchen die Straßenkapazität in Abhängigkeit der gefahrenen Geschwindigkeit und berechnen das Tempolimit bei welchem die meisten Autos einen Straßenabschnitt passieren können. Wir finden ein Maximum von ungefähr 2000 Autos pro Stunde, bei der optimalen Geschwindigkeit von 31 km/h. Somit können Stauzeiten minimiert werden indem städtische Tempolimits auf 30 km/h verringert werden.

Aktualisierte Versionen dieses und verwandter Artikel auf Deutsch, Englisch und Italienisch sind verfügbar auf `https://nielsbenedikter.de/traffic.html` *als PDF zum Download oder zum online Lesen.*

1 Wie viele Fahrzeuge können bei einer gegebenen Geschwindigkeit passieren?

Bei welcher Geschwindigkeit wird die Zahl der Autos, die einen Straßenabschnitt passieren können, maximal? Mit höherer Geschwindigkeit spielen zwei gegenläufige Effekte eine Rolle: einerseits sind die Autos schneller (und die höhere Geschwindigkeit sollte die Zahl der durchfahrenden Autos *erhöhen*), andererseits nimmt der Abstand zwischen den Autos zu (so dass höhere Geschwindigkeit potenziell die Zahl durchfahrender Autos *verringert*). **Bei welcher Geschwindigkeit liegt die beste Balance dieser beiden Effekte vor, und damit: bei welcher Geschwindigkeit gibt es am wenigsten Stau?**

Betrachten wir eine einzelne Spur einer städtischen Straße. Wir stellen uns neben die Straße und zählen die vorbeifahrenden Autos, in Abhängigkeit von der erlaubten und gefahrenen Geschwindigkeit. Innerhalb einer Stunde fährt im besten Fall eine Autokolonne der Länge

$$L = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeitabschnitt} = v \cdot 1\,\text{h}$$

an uns vorbei. Je schneller die Autos fahren, desto länger die Kolonne die an uns vorbeifährt. Aber wie viele Autos sind in dieser Kolonne?

Offensichtlich können Autos nicht beliebig dicht hintereinander fahren. Ampeln werden rot, Staus bilden sich, Autos ziehen unvorhersehbar aus Parklücken heraus, oder aus Seitenstraßen auf die Hauptstraße. Häufiges Anhalten ist leider notwendig um Kollisionen zu verhindern. Und Kollisionen müssen selbstverständlich vermieden werden, denn damit geht meist ein lang andauernder Stau einher, während die Unfallstelle geräumt wird. Sicherheitsabstand ist eine strikte Notwendigkeit.

Berechnen wir den Sicherheitsabstand d der notwendig ist um Kollisionen zu vermeiden. Zum Sicherheitsabstand gehören zwei Beiträge, d_1 und d_2, welche wir im folgenden erklären werden; wir schreiben

$$d = d_1 + d_2 \; .$$

Der erste Beitrag zum Sicherheitsabstand folgt aus der Zeit, die Fahrer und Fahrzeug benötigen um zu reagieren: die Zeit, die der Fahrer benötigt um wahrzunehmen, dass er bremsen muss (Reaktionszeit), die Zeit um den Fuß auf das Bremspedal zu bringen und die Bremse zu betätigen, und die Zeit für den Druckaufbau im Bremssystem des Autos. Im Idealfall eines aufmerksamen Fahrers, der nicht aufs Handy schaut und nicht angetrunken oder müde ist, liegt diese Zeit insgesamt bei etwas weniger als einer Sekunde [Rei22]

$$t_1 = 0.8\,\mathrm{s} \; .$$

Während dieser Periode fährt das Auto weiter mit der anfänglichen Geschwindigkeit, und legt dabei die Wegstrecke

$$d_1 = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeitintervall} = v \cdot t_1$$

zurück. Erst danach fangen die Bremsen an, das Auto zu verlangsamen. Wie lange dauert es, bis das Auto anhält? Unter guten Bedingungen [Ins23] (mit guten Reifen auf sauberem, trockenem Asphalt) liegt die Verzögerung bei $a = 8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Das bedeutet, dass sich in jeder Sekunde des Bremsens die Geschwindigkeit um $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verringert. Folglich kommt das Auto nach der Zeitperiode

$$t_2 = \frac{\text{anfängliche Geschwindigkeit}}{\text{Verzögerung}} = \frac{v}{a}$$

zum Anhalten. Jetzt ist eine kurze Rückbesinnung auf den Physikunterricht notwendig [CK-23]: während des Bremsens legt das Auto noch die Distanz

$$d_2 = \frac{a}{2} t_2^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

zurück. Um nicht zu kollidieren und denn Verkehr damit komplett zu blockieren, müssen Autofahrer also den Sicherheitsabstand

$$d = v \cdot t_1 + \frac{v^2}{2a}$$

einhalten.

"Aber aber das Auto vor mir bewegt sich ja auch und hält nicht von einem Moment auf den anderen komplett an." Ja, das ist mir bewusst und in Abschnitt 3 werden wir diesen Einwand in Ruhe diskutieren, und es wird klar werden, dass unser Modell das richtige Modell für die Beschreibung des realen städtischen Verkehrs ist. Im Rest des gegenwärtigen Abschnitts dagegen leiten wir einige nützliche Vorhersagen aus dem Modell ab.

Zusätzlich zum Sicherheitsabstand müssen wir bedenken, dass die Autos selbst auch eine Länge haben. Im Jahr 2019 lag die durchschnittliche Länge von Autos in Deutschland [Chr20], und ähnlich in Westeuropa, bei $\ell = 4.6\,\mathrm{m}$ (und zunehmend).

Wir können nun berechnen, wie viele Autos in einer Kolonne der Länge L fahren: das ist die Länge der Kolonne geteilt durch die pro Fahrzeug belegte Länge:

$$N = \frac{L}{d+\ell} = \frac{v \cdot 1\,\mathrm{h}}{v \cdot 0.8\,\mathrm{s} + \frac{v^2}{16\,\mathrm{m\,s^{-2}}} + 4.6\,\mathrm{m}}\,.$$

Dieses Modell beschreibt den Bestfall: wenn alle Fahrer genau das Tempolimit fahren, niemand schleicht, niemand übermäßig beschleunigt und dann stark bremsen muss, und alle Fahrer sehr aufmerksam sind um schnell reagieren zu können. Im realen Verkehr ist N geringer weil Autofahrer abgelenkt sind, zu schnell fahren und dann durch abruptes Bremsen "Staus aus dem Nichts"[1] erzeugen oder sogar kollidieren.

Falls wir die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde messen (statt in Kilometer pro Stunde) und eine Stunde als 3600 Sekunden schreiben, $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, dann können wir die Maßeinheiten aus der Formel wegkürzen. Die **Straßenkapazität** (d. h., die Anzahl Autos die in einer Stunde den Beobachter am Straßenrand passieren können) ist dann

$$\boxed{N(v) = \frac{3600v}{0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6} \quad \text{mit Geschwindigkeit } v \text{ gemessen in } \mathrm{m\,s^{-1}}}\,.$$

Es bleibt nur noch die Aufgabe, die Geschwindigkeit v zu finden, bei welcher die Anzahl Autos $N(v)$ maximal wird. Das ist eine mathematische Aufgabe die wir im nächsten Abschnitt lösen, zuerst unter Zuhilfenahme des Computers (für diejenigen die nicht gerne rechnen), danach mit Bleistift und Papier mit etwas Mittelstufenmathematik.

2 Bestimmung des Effizientesten Tempolimits

Die Funktion $N(v)$ ist in Abbildung 1 dargestellt. Wir müssen die Geschwindigkeit v finden bei welcher die Anzahl Autos am größten wird, d. h., die Position des Maximums von $N(v)$.

[1] Das Zustandekommen eines sogenannten "Staus aus dem Nichts" wird im nächsten Artikel *"Wie Mathematik Staus verhindert II: Das Optimale Tempolimit für Autobahnen"* erklärt.

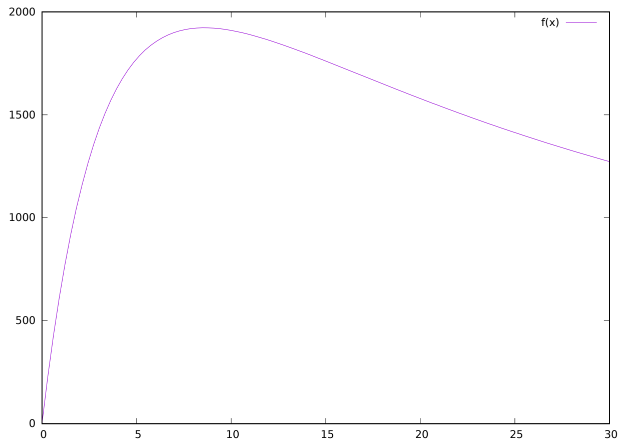

Abbildung 1: Horizontal: Tempolimit in $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vertikal: Straßenkapazität in Anzahl Autos welche den Straßenabschnitt passieren können. Die Kapazität wird maximal mit 1923 Autos wenn alle Fahrer $v = 8.58\,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 31\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ fahren.

Lösung mit Computer Bevor wir die Lösung mit Bleistift und Papier besprechen, nehmen wir eine Abkürzung: öffnen Sie die Seite `https://www.wolframalpha.com`, geben Sie ein

```
maximum of 3600*v/(0.8*v+v^2/16+4.6)
```

und drücken Sie 'Enter'. WolframAlpha berechnet, dass die maximale Autozahl gegeben ist durch

$$N_{\max} = \frac{12000}{17}\left(\sqrt{115} - 8\right) \simeq 1923\,\text{Autos} \tag{1}$$

wenn das Tempolimit bei

$$v = 4\sqrt{\frac{23}{5}}\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 8.579\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 30.88\,\mathrm{km\,h^{-1}} \tag{2}$$

liegt. Die effizienteste Nutzung der Straße wäre also wenn alle Fahrer genau

$$\boxed{v = 31\,\mathrm{km\,h^{-1}}}$$

fahren. Bei dieser Geschwindigkeit kommt die größte Zahl Autofahrer ohne Stau ans Ziel. Wird schneller gefahren, kommt es zu Unfällen oder den berüchtigten "Staus aus dem Nichts". Langsamer ist, bei übersichtlichen und sicheren Straßenverhältnissen, unnötig langsam.

Zum Vergleich: bei $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 13.88\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verringert sich die Straßenkapazität auf $N(13.88) = 1801$ Autos pro Stunde. Und bei $v = 70\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 19.44\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ können nur noch $N(19.44) = 1599$ Autos den Straßenabschnitt in einer Stunde passieren. Wenn mehr Fahrer versuchen, die Strecke zu befahren, zum Beispiel im Berufsverkehr, dann bleiben $1923 - 1599 = 324$ Autos im Stau stecken. Bei einer Länge von $\ell = 4.6\,\mathrm{m}$ pro Auto (und mit einer Distanz von $40\,\mathrm{cm}$ zwischen den Stoßstangen der stehenden Autos im Stau), verursacht das *höhere* Tempolimit einen Stau mit einer Länge von

$$5\,\mathrm{m} \cdot 324 = 1620\,\mathrm{m} = 1.62\,\mathrm{km}.$$

Einfach durch verringern des Tempolimits von den üblichen $70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ **oder** $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ **auf die effizientesten** $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ **können wir den Stau im Berufsverkehr um** $1.6\,\mathrm{km}$ **verkürzen.** Hört sich das widersinning an? Überlegen Sie es sich so: das niedrigere Tempolimit verringert den ungenutzten Raum zwischen den Fahrzeugen, die sich nun langsamer, dafür aber koordinierter fortbewegen.

Lösung mit Papier und Bleistift Wenn Sie Rechnungen hassen, überspringen Sie diesen Abschnitt. Ansonsten erkläre ich jetzt, wie Sie die gleiche Lösung ohne Computer finden (keine Sorge, es braucht nur Mittelstufenmathematik, konkret: Ableitungen). Um das Maximum der Funktion $N(v)$ zu finden, berechnen wir ihre Ableitung mit der Quotientenregel [Wik22]:

$$N'(v) = \frac{3600\Big(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\Big) - 3600v\Big(0.8 + \frac{v}{8}\Big)}{\Big(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\Big)^2} \,.$$

Das Maximum finden wir indem wir die Ableitung gleich Null setzen:

$$0 = \frac{3600\Big(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\Big) - 3600v\Big(0.8 + \frac{v}{8}\Big)}{\Big(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\Big)^2} \,.$$

Die rechte Seite kann nur Null werden, wenn der Zähler Null wird, also reicht es aus die Gleichung

$$0 = 3600\Big(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\Big) - 3600v\Big(0.8 + \frac{v}{8}\Big)$$

nach v aufzulösen. Wir dividieren durch 3600, lösen die Klammern auf, und erhalten

$$0 = 0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6 - 0.8v - \frac{v^2}{8} = -\frac{v^2}{16} + 4.6 \,.$$

Mit $4.6 = \frac{23}{5}$ erhalten wir $v = 4\sqrt{\frac{23}{5}}$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von WolframAlpha (2).

3 Zweifel, und Beobachtungen im Echten Leben

"Aber das Auto vor mir bewegt sich ja auch und kann nicht von einem Moment zum anderen komplett anhalten, es wird ja auch erst allmählich langsamer und legt noch seinen Bremsweg zurück. . . " Ok, Sie haben selbstverständlich Recht. Aber läuft das unserer Argumentation zuwider?

In diesem Artikel sprechen wir vom Verkehr in einer Stadt. Wenn wir über den Verkehr auf der Autobahn sprechen, haben Sie völlig Recht. (Lesen Sie dazu den nächsten Artikel, *"Wie Mathematik Staus verhindert II: Das Optimale Tempolimit für Autobahnen"*. Spoiler: das optimale Tempolimit, bei welchem auf Autobahnen am wenigsten Staus auftreten, ist höher als $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.) Auf einer Autobahn brauchen Sie weniger Sicherheitsabstand, im wesentlichen nur ein wenig mehr als Ihre Reaktionszeit, da das Auto vor Ihnen auch noch einen Bremsweg zurücklegt beim Anhalten und keine anderen wesentlichen Hindernisse auftreten. Aber in einer Stadt? In einer Stadt gibt es Fahrer, die aus Parklücken am Straßenrand plötzlich in den Verkehr ziehen, andere Fahrer kommen aus Seitenstraßen geschossen kaum dass das Auto vor Ihnen die Kreuzung passiert hat, andere wechseln abrupt die Spur, Ampeln werden rot, Türen an geparkten Autos werden aufgeschwungen usw. Alles kann jederzeit passieren. Manche Autos haben stärkere Bremsen, andere schwächere. Manche Fahrer sind durch Handy abgelenkt oder müde und haben dadurch eine wesentlich schlechtere Reaktionszeit. Manche sind ungeduldig und drängeln. Sie müssen jederzeit reagieren können, und Sie müssen jederzeit in der Lage sein, sicher anhalten zu können.

Überzeugt Sie das Modell dennoch nicht? Ja, das Modell ist sehr einfach. In der Mathematik werden solche Modell als Mean–Field–Modelle bezeichnet, wo sich alle Fahrer zu jedem Zeitpunkt im wesentlichen gleich verhalten und synchronisiert reagieren. (D. h., realistischere Modelle liefern sogar noch niedrigere Vorhersagen für die optimale Geschwindigkeit als Mean–Field–Modelle.) Als Mathematiker können wir unser Modell mit solchen komplexeren Modellen vergleichen, oder Simulationen berechnen. Das geht über diesen Artikel hinaus, aber wird natürlich getan – und bestätigt unsere Vorhersagen. Aber es gibt noch eine bessere Möglichkeit: wir vergleichen unsere Vorhersage einfach mit Beobachtungen im echten Leben, im echten Stadtverkehr.

Also, sind unsere Resultate realistisch? Die Effekte von niedrigeren Tempolimits in Städten sind vielfach beobachtet und untersucht worden; Sie finden einen Überblick beispielsweise in [Ger20]. Einige der wichtigsten Beobachtungen sind die folgenden:

- Eine britische Studie hat gezeigt, dass ein Tempolimit von $20\,\mathrm{miles/h} = 32\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ die Anzahl Kollisionen um 42% verringert. Dies belegt insbesondere die Notwendigkeit einen Sicherheitsabstand einzuhalten, der jederzeit ein völliges Anhalten ermöglicht (viele Fahrer halten bei höheren Geschwindigkeiten nicht den notwendigen Sicherheitsabstand ein und verursachen dadurch Unfälle). Kollisionen müssen zwingend vermieden werden, denn sie verursachen große Verkehrsstörungen und blockieren den Verkehr oft vollständig.

- Eine Studie in der Schweiz beobachtete 22% weniger Kollisionen, eine entsprechende Verringerung der Staus und damit auch entsprechend weniger Zeitverluste.

- Während es theoretisch bei $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ganze 4 Sekunden länger braucht um 100 Meter zu fahren (im Vergleich zu $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$), wird in realen Verkehrsverhältnissen beobachtet dass "für zügiges Fortkommen die Anlage von Kreuzungen und die Kontinuität des Verkehrsflusses wesentlich wichtiger ist als die erlaubte Höchstgeschwindigkeit". Gemessene Reisezeiten sind bei Verringerung der Höchstgeschwindigkeit gleich geblieben oder haben sich leicht verkürzt.

- Die Zahl der Autos die eine Fahrspur in einer Stunde passieren können ist durch eine Vielzahl an Beobachtungen und Zählungen ermittelt worden: sie liegt bei 1800–2000 Autos; unser Modell hat 1923 Autos vorhergesagt in exzellenter Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten.

Aber verursachen Autos bei niedrigerer Geschwindigkeit nicht sogar mehr Abgase? Schließlich benutzt man einen niedrigeren Gang, oder nicht? Messungen zeigen, dass niedrigere Tempolimits die Hauptursachen starker Emissionen verringern, nämlich starkes Beschleunigen und abruptes Bremsen [Ger20]. Da Straßen niemals perfekt flach, gerade, und frei von Kreuzungen und Ampeln sind, ist dieser Effekt so gut wie immer der entscheidende. Achja, und: moderne Autos können 30km/h problemlos im 3. Gang fahren, bei gleichmäßigem Verkehrsfluss oft sogar im 4. Gang. Nein, man muss bei 30km/h nicht im 1. Gang fahren. Die Drehzahl darf auch deutlich unter 2000 bleiben.

> "Der Berliner Senat hat an drei Straßen über drei Jahre gemessen. Dort sanken die NO2-Werte[2] nach Einführung von Tempo 30 zwischen 5,7 und 12,8 Prozent. Der elementare Kohlenstoff nahm ebenfalls ab (zwischen 0,3 und 2,2 Prozent) und geringfügig auch Feinstaub (1,8 Prozent)." [Ger20]

Aber gäbe es nicht Tricks um Leute effizienter von und zur Arbeit zu bringen? Im Mittel befinden sich in einem Auto 1,45 Personen, den Fahrer inklusive [Eur15]. Im Berufsverkehr ist der Besetzungsgrad noch deutlich geringer. Die Anzahl Personen die pro Fahrspur in einer Stunde mit dem Auto zur Arbeit fahren können ist also, gemäß (1), weniger als

$$1.45\,\text{Personen/Auto} \cdot 1923\,\text{Autos} = 2788\,\text{Personen}.$$

Wie wäre es mit selbstfahrenden Autos oder zumindest mit elektronischer Abstandsautomatik? Vielleicht könnte man sogar abgeschlossene Spuren nur für solche Autos einrichten, so wie die Teslas in den Tunnels von Elon Musk's Boring Company? Die schlechte Neuigkeit ist: Elon Musk kann die Grenzen der Physik auch nicht überwinden, auch in seinen Tunnels kommt es zu Staus [Mor22]. Die gute Neuigkeit ist: wenn man diese elektrischen Fahrzeuge aneinander kuppelt (womit kein Sicherheitsabstand mehr notwendig ist) und in kontrollierten Zeitintervallen fahren lässt, beispielsweise alle 3 Minuten, funktioniert es. Und das gibt es bereits seit Jahrzehnten und nennt sich U-Bahn. Eine U-Bahn–Linie transportiert problemlos 25 000 Personen/h. Um so viele Menschen mit dem Auto zur Arbeit zu bringen, bräuchte es eine Autobahn mit 9 Spuren in die Stadt – und weitere 9 Spuren zum verlassen der Stadt, insgesamt 18 Spuren. Eine Spur auf einer deutschen Autobahn [Bun09] ist 3.75 m breit, so dass diese Autobahn (inklusive Seitenstreifen) mehr als 70 m breit wäre. Stellen Sie sich vor, solche gigantischen Schneisen aus allen Richtungen durch unsere Städte zu schlagen. Die horrenden Baukosten, die Enteignung und Zwangsumsiedlung zehntausender Mitbürger, die Zerstörung historischer Bausubstanz und etablierter wirtschaftlicher Strukturen. Es gibt einen Grund, warum

[2] Stickstoffdioxid ist ein giftiges Gas mit stechendem Geruch. Die mittlere tödliche Dosis liegt bei ca. 174 ppm über eine Stunde [The18].

U-Bahnen besser als Autobahnen für den Stadtverkehr geeignet sind. Und schlussendlich liegt dieser Grund in den physikalischen Gesetzen von Beschleunigung und Verzögerung und etwas Mathematik, wie Sie gelernt haben.

4 Zusammenfassung und Folgerungen

Wir haben unser Modell mit realen Beobachtungen verglichen und dabei exzellente hervorragende Übereinstimmung gefunden. Insbesondere haben wir bewiesen, dass ein und die selbe Straße mehr Menschen zur Arbeit bringen kann wenn das Tempolimit auf $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ verringert wird. Die niedrigere Geschwindigkeit macht den Verkehrsfluss stetiger, reduziert das Auftreten von Staus, und *verringert* so die Gesamtfahrzeiten obwohl die Höchstgeschwindigkeit niedriger ist. Eine Stadt mit allgemeinem Tempolimit von $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ist nicht nur sicherer, sondern auch komfortabler für die Autofahrer, die damit weniger Lebenszeit im Stau verschwenden müssen.

Literatur

[Bun09] Bundesministerium für Digitales und Verkehr. Richtlinien für die Anlage von Autobahnen (RAA). `https://bmdv.bund.de/SharedDocs/DE/Anlage/StB/ars-aktuell/allgemeines-rundschreiben-strassenbau-2009-07.pdf` *Allgemeines Rundschreiben Straßenbau*, 7, 2009.

[Chr20] Johannes Christ. Datenanalyse: Autos werden nicht erst seit dem SUV-Boom größer. `https://www.rnd.de/wirtschaft/datenanalyse-autos-werden-nicht-erst-seit-dem-suv-boom-grosser-6GTM66RRNJEC7EYHR3FQS7Y24Y.html`, February 2020.

[CK-23] CK-12 Foundation. Displacement During Uniform Acceleration. `https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-physics-flexbook-2.0/section/2.6/primary/lesson/displacement-during-constant-acceleration-phys/`, February 2023.

[Eur15] European Environment Agency. Occupancy rates of passenger vehicles. `https://www.eea.europa.eu/data-and-maps/indicators/occupancy-rates-of-passenger-vehicles/occupancy-rates-of-passenger-vehicles`, August 2015.

[Ger20] Saskia Gerhard. Das wissen wir über Tempolimits. `https://www.quarks.de/technik/mobilitaet/faq-tempolimits/`, January 2020.

[Ins23] Institut für Unfallanalysen Hamburg. Bremstabelle A. `https://unfallanalyse.hamburg/index.php/ifu-lexikon/bremsen/bremstabelle-a/`, February 2023.

[Mor22] Jack Morse. Oh look, it's a Tesla traffic jam in Las Vegas' Boring Company tunnel. `https://mashable.com/article/ces-las-vegas-boring-tunnel-tesla-traffic`, January 2022.

[Rei22] Konrad Reif. *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*. Springer Vieweg, Wiesbaden Heidelberg, 30. aufl. 2022 edition, May 2022.

[The18] The National Institute for Occupational Safety and Health (NIOSH). Immediately Dangerous to Life or Health Concentrations (IDLH): Nitrogen dioxide. `https://www.cdc.gov/niosh/idlh/10102440.html`, November 2018.

[Wik22] Wikipedia. Quotient rule. `https://en.wikipedia.org/wiki/Quotient_rule`, December 2022.