

Come Ridurre la Congestione I: Il Limite di Velocità Ottimale per il Traffico Urbano

Prof. Dr. Niels Benedikter
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano

March 6, 2024

Abstract

Le città sono afflitte dai ingorghi stradali. Come possono le amministrazioni ridurre la congestione? Analizziamo la capacità stradale in funzione della velocità di guida e calcoliamo il limite di velocità al quale il più grande numero di auto può attraversare una determinata sezione stradale. Troviamo il massimo essere di circa 2000 auto, alla velocità ottimale di 31 km/h. Pertanto, il tempo perso dai cittadini a causa della congestione del traffico può essere ridotto al minimo diminuendo i limiti di velocità urbana a 30 km/h.

Versioni aggiornate di questo e altri articoli in inglese, tedesco e italiano sono disponibili su <https://nielsbenedikter.de/traffic.html> in formato PDF per il download o per essere letti direttamente online.

1 A una data velocità, quanti veicoli possono passare?

A quale velocità una strada permette il passaggio del più grande numero di veicoli? Ci sono due effetti diametrali della velocità più elevata: da un lato, le auto passano più velocemente (quindi una velocità maggiore dovrebbe *aumentare* il numero di veicoli che possono passare), d'altra parte, le distanze tra le auto aumentano (quindi una velocità maggiore dovrebbe *diminuire* il numero di veicoli che possono passare per la strada). **A quale velocità abbiamo il miglior compromesso tra questi due effetti e quindi: quale limite di velocità minimizza la congestione?**

Consideriamo una singola corsia di una strada cittadina. Ci poniamo in un punto arbitrario sul lato della corsia e contiamo quanti veicoli passano se tutti si muovono con la velocità v . Osservando per un'ora, questa è una fila di auto di lunghezza

$$L = \text{velocità} \cdot \text{periodo di tempo} = v \cdot 1 \text{ h} .$$

Più velocemente vanno le auto, più lunga può essere la fila che mi sorpassa. Quanti veicoli ci sono in questa fila?

Naturalmente potremmo dire: fagli stare a ruota. Ma questo è traffico urbano. Semafori che diventano rossi, ingorghi stradali, attraversamenti pedonali, auto parcheggiate o che si spostano, conducenti che escono improvvisamente dalle strade laterali e così via: devi rallentare o fermarti frequentemente per non schiantarti. Uno schianto provoca sicuramente un grosso ingorgo stradale, e quindi abbiamo bisogno di una distanza di frenata tra le auto. Le auto non possono guidare troppo vicine.

Calcoliamo la distanza di sicurezza d di cui abbiamo bisogno per evitare collisioni. Ha due parti, d_1 e d_2 che spiegherò tra un momento, quindi

$$d = d_1 + d_2 .$$

La prima parte è il tempo che il conducente e l'auto impiegano per reagire: il tempo che il conducente impiega per percepire la necessità di fermarsi (tempo di reazione), il tempo che ci vuole perché il piede del conducente prema il freno e il tempo perché il freno aumenti la pressione. Supponendo che il conducente rimanga attento al traffico, non guardi il telefono e non sia ubriaco o stanco, questo si osserva [Rei22] essere in media un po' meno di un secondo

$$t_1 = 0.8 \text{ s} .$$

Durante questo periodo l'auto viaggia ancora alla massima velocità, coprendo la distanza

$$d_1 = \text{velocità} \cdot \text{periodo di tempo} = v \cdot t_1 .$$

Ora i freni iniziano a rallentare l'auto. Quanto tempo ci vuole per fermare l'auto? In condizioni favorevoli [Ins23] (in particolare su superficie asciutta) la decelerazione è $a = 8 \text{ m s}^{-2}$. Ciò significa che durante ogni secondo di frenata, la velocità viene ridotta di 8 m s^{-1} . Quindi la velocità è zero, cioè il veicolo si ferma, dopo un periodo di tempo

$$t_2 = \frac{\text{velocità iniziale}}{\text{decelerazione}} = \frac{v}{a} .$$

Ora ricorda le tue lezioni di fisica [CK-23]: mentre freni, l'auto percorre una distanza

$$d_2 = \frac{a}{2} t_2^2 = \frac{a}{2} \left(\frac{v}{a} \right)^2 = \frac{v^2}{2a} .$$

Quindi per non schiantarsi e mandare il traffico in un completo collasso prima o poi, i conducenti devono mantenere una distanza di sicurezza

$$d = v \cdot t_1 + \frac{v^2}{2a} .$$

Ti sento dire "Ma ma ma l'auto davanti sta anche muovendosi e non può fermarsi da un momento all'altro, rallenterà gradualmente come l'auto dietro..." sì, ne sono consapevole, leggi Section 3 per una discussione dei tuoi dubbi. Ti convincerò che il modello è corretto. Per il momento, analizziamo il modello.

Oltre alla distanza di frenata, dobbiamo ricordare che le auto stesse hanno una certa lunghezza. Nel 2019 la lunghezza media delle auto in Germania [Chr20], e analogamente nel resto dell'Europa occidentale, era $\ell = 4.6 \text{ m}$ (e in crescita).

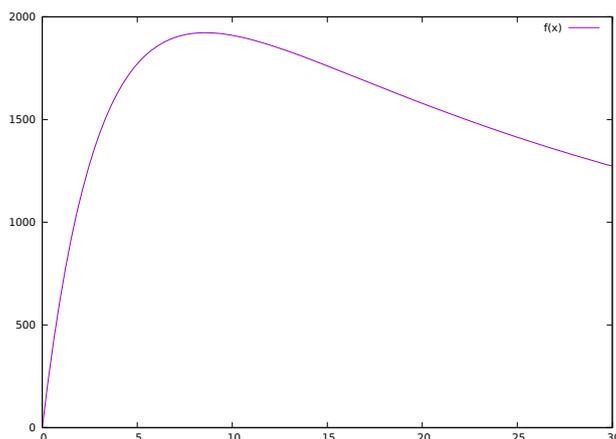


Figure 1: Orizzontale: limite di velocità in m s^{-1} . Verticale: numero di auto che possono passare. Il numero di auto diventa massimale se tutti i conducenti guidano a $v = 8.58 \text{ m s}^{-1} \simeq 31 \text{ km h}^{-1}$.

Possiamo ora calcolare quanti veicoli ci sono nella fila di lunghezza L : è la lunghezza della fila divisa dalla distanza occupata da ogni auto:

$$N = \frac{L}{d + \ell} = \frac{v \cdot 1 \text{ h}}{v \cdot 0.8 \text{ s} + \frac{v^2}{16 \text{ m s}^{-2}} + 4.6 \text{ m}} .$$

Ricorda che questo modello descrive il caso migliore: se tutti i conducenti guidano esattamente alla velocità limite v , nessuno striscia, nessuno accelera troppo e poi frena bruscamente, e in generale ogni conducente rimane molto attento per reagire immediatamente. Nella vita reale, N è inferiore perché i conducenti si distraggono, guidano troppo veloci, poi frenano bruscamente e causano ingorghi stradali o incidenti.

Se misuriamo la velocità in metri al secondo (anziché chilometri all'ora), e scriviamo un'ora come 3600 secondi, $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, possiamo dimenticarci delle unità di misura nella formula. Quindi la **capacità stradale** (che è semplicemente il numero di auto che passano l'osservatore) è

$$N(v) = \frac{3600v}{0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6} \quad \text{alla velocità } v \text{ misurata in } \text{m s}^{-1} .$$

Rimane solo da trovare la velocità v alla quale il numero di veicoli $N(v)$ diventa massimale. Questo è un compito matematico che affrontiamo nella prossima sezione, prima con l'aiuto di un computer per coloro che non amano i calcoli, poi a mano usando matematica di livello universitario di base.

2 Trovare il Limite di Velocità più Efficiente

La funzione $N(v)$ è schematizzata nella Figura 1. Dobbiamo trovare la velocità v alla quale il numero di auto diventa più grande, cioè la posizione del massimo di $N(v)$.

Soluzione tramite computer Prima di discutere la soluzione "a mano", facciamo una scorciatoia: vai su <https://www.wolframalpha.com> e inserisci quanto segue

maximum of $3600*v/(0.8*v+v^2/16+4.6)$

poi premi invio. WolframAlpha calcola che il massimo numero di auto è

$$N_{\max} = \frac{12000}{17} (\sqrt{115} - 8) \simeq 1923 \text{ auto} \quad (1)$$

per il limite di velocità a velocità

$$v = 4\sqrt{\frac{23}{5}} \text{ m s}^{-1} \simeq 8.579 \text{ m s}^{-1} = 30.88 \text{ km h}^{-1}. \quad (2)$$

Quindi l'uso più efficiente di una strada (permettendo il passaggio del più grande numero di auto senza causare ingorghi stradali o incidenti) è se tutti i conducenti guidano esattamente

$$\boxed{v = 31 \text{ km h}^{-1}}.$$

Per confronto: a $v = 50 \text{ km h}^{-1} = 13.88 \text{ m s}^{-1}$, il numero di auto che possono passare in un'ora si riduce a $N(13.88) = 1801$ auto. E a $v = 70 \text{ km h}^{-1} = 19.44 \text{ m s}^{-1}$, solo $N(19.44) = 1599$ auto possono passare per la strada. Se più conducenti cercano di passare, ad esempio durante l'ora di punta, la differenza di $1923 - 1599 = 324$ auto si accumula come un ingorgo stradale. A una lunghezza di $\ell = 4.6 \text{ m}$ per auto (e aggiungendo 40 cm di distanza paraurti a paraurti tra le auto bloccate nel traffico), il limite di velocità *più alto* causa un ingorgo stradale aggiuntivo di lunghezza

$$5 \text{ m} \cdot 324 = 1620 \text{ m} = 1.62 \text{ km}.$$

Quindi semplicemente riducendo il limite di velocità dai comuni 70 km h^{-1} o 50 km h^{-1} all'ottimale 30 km h^{-1} possiamo accorciare l'ingorgo stradale dell'ora di punta di 1.6 km . Ti sembra controintuitivo? Pensaci in questo modo: il limite di velocità ridotto porta a una fila di auto più densa, che si muove più lentamente ma in modo più continuo, lasciando meno spazi vuoti.

Soluzione con carta e penna Se non ti piacciono i calcoli, salta questo paragrafo. Altrimenti ora ti mostro come arrivare alla stessa conclusione con un calcolo a carta e penna senza ricorrere a un computer (non preoccuparti, è molto semplice, l'unica cosa di cui hai bisogno sono derivate). Per trovare il massimo della funzione $N(v)$, calcoliamo la sua derivata usando la regola del quoziente [Wik22]:

$$N'(v) = \frac{3600 \left(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6 \right) - 3600v \left(0.8 + \frac{v}{8} \right)}{\left(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6 \right)^2}.$$

Otteniamo la posizione del massimo richiedendo che la derivata sia zero e risolvendo per v :

$$0 = \frac{3600\left(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\right) - 3600v\left(0.8 + \frac{v}{8}\right)}{\left(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\right)^2}.$$

Ma il lato destro può essere zero solo se il numeratore è zero, quindi è equivalente a risolvere

$$0 = 3600\left(0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6\right) - 3600v\left(0.8 + \frac{v}{8}\right).$$

Dividiamo per 3600 ed espandiamo le parentesi per ottenere

$$0 = 0.8v + \frac{v^2}{16} + 4.6 - 0.8v - \frac{v^2}{8} = -\frac{v^2}{16} + 4.6.$$

Con $4.6 = \frac{23}{5}$ otteniamo $v = 4\sqrt{\frac{23}{5}}$, in accordo con il risultato di WolframAlpha (2).

3 Dubbi e Osservazioni nella Vita Reale

“Ma ma ma hai dimenticato che anche l’auto davanti si sta muovendo e non può fermarsi da un momento all’altro, rallenterà gradualmente come l’auto dietro...” OK, hai ragione, e sono consapevole di questo fatto riguardo all’arresto di un’auto in movimento.

Ora in questo articolo stiamo parlando del traffico in una città. Se parliamo di autostrade, hai ragione. (Vedi il prossimo articolo, “*Come Ridurre la Congestione II: Limite di Velocità Ottimale per le Autostrade*” per una discussione sul traffico e i limiti di velocità per le autostrade. Anche la matematica ha qualcosa da dire su questo argomento. Spoiler: il limite di velocità ottimale per le autostrade è più alto di 30 km h^{-1} .) Su un’autostrada devi mantenere una distanza di sicurezza inferiore, fondamentalmente solo un po’ più della tua reazione, perché anche l’auto davanti a te non può fermarsi bruscamente. Ma in una città? In una città ci sono altri conducenti che escono dai parcheggi, che escono dalle strade laterali non appena il conducente di fronte a te ha superato l’incrocio, persone che cambiano corsia senza dare segnali, semafori che diventano rossi, porte di auto parcheggiate che si aprono e così via. Il flusso non è solo lineare lungo una strada senza incroci. Può accadere qualsiasi cosa. Inoltre, alcune auto hanno freni più potenti, altre auto hanno freni più deboli. Alcuni conducenti sono distratti dal cellulare o stanchi, quindi i loro tempi di reazione sono peggiori. E molti sono impazienti. Potresti dover reagire improvvisamente e potresti dover fermarti completamente in qualsiasi momento. Ancora non mi credi che il modello sia ragionevole?

Sì, il nostro modello è molto semplice. In matematica un tale modello è noto come modello di campo medio, dove tutti i conducenti si comportano allo stesso modo in ogni momento. Come matematici, possiamo confrontarlo con modelli più complessi e con simulazioni. Questo va oltre lo scopo di questo articolo, ma i risultati confermano

generalmente la nostra visione. Ma c'è un'opzione ancora migliore: confrontiamo con l'osservazione della vita reale.

Quindi il nostro risultato è realistico? Alla fine, l'osservazione e il confronto con il mondo reale devono decidere sull'applicabilità di un modello matematico. Quindi diamo un'occhiata alla realtà. Gli effetti della riduzione dei limiti di velocità nelle città sono stati osservati; puoi trovare una panoramica in [Ger20]. Le osservazioni chiave sono le seguenti:

- Uno studio britannico ha dimostrato che un limite di velocità di 20 miglia/h = 32 km h^{-1} ha ridotto il numero di incidenti del 42%. Questo conferma la necessità di una distanza di sicurezza che permetta una fermata completa in qualsiasi momento (molti conducenti non rispettano la distanza di sicurezza a velocità più elevate, causando così collisioni). Naturalmente gli incidenti devono essere rigorosamente evitati; causano enormi interruzioni e tendono a bloccare completamente il traffico.
- Uno studio in Svizzera ha riscontrato il 22% in meno di collisioni, di conseguenza meno ingorghi stradali, e di conseguenza tempi di guida ridotti.
- Se teoricamente a 30 km h^{-1} ci vogliono 4 secondi in più per percorrere una distanza di 100 metri (rispetto a 50 km h^{-1}), nella realtà si osserva che "per un progresso veloce, la progettazione degli incroci e un flusso continuo del traffico sono molto più determinanti della velocità massima consentita" e i tempi di viaggio totali sono rimasti uguali o leggermente ridotti dopo la riduzione del limite di velocità.
- Il numero massimo di auto che possono passare in una singola corsia in un'ora è ovunque osservato essere di 1800 auto a 2000 auto; il nostro modello ha previsto un massimo di 1923 auto in ottimo accordo con questa osservazione nelle città reali.

Ma le auto non inquinano di più se vanno più lentamente? Dopotutto, si usa una marcia più bassa, vero? Le misurazioni raccolte da [Ger20] mostrano che i limiti di velocità più bassi riducono le principali fonti di emissioni, ovvero forti accelerazioni e frenate brusche. Poiché le strade sono raramente perfettamente pianeggianti, rettilinee e prive di incroci e semafori, questi effetti sono quasi sempre più significativi rispetto alla marcia.

"Il Senato di Berlino ha misurato tre strade per tre anni. I valori di biossido di azoto¹ sono diminuiti tra il 5,7 e il 12,8 per cento dopo l'introduzione del limite di velocità di 30 km/h. Anche il carbonio elementare è diminuito (tra lo 0,3 e il 2,2 per cento), così come le particelle solide (1,8 per cento)." [Ger20]

¹Il biossido di azoto è un gas velenoso con un odore pungente e acre. La dose letale mediana è di circa 174 ppm per un'esposizione di un'ora [The18].

E per quanto riguarda portare le persone al lavoro in modo efficiente? In media ci sono 1,45 persone per auto inclusi il conducente [Eur15], durante l'ora di punta ancora meno. Il numero massimo di persone nelle auto su una corsia in un'ora è, secondo (1), inferiore a

$$1.45 \text{ persone/auto} \cdot 1923 \text{ auto} = 2788 \text{ persone.}$$

Ma cosa succederebbe se avessimo auto controllate elettronicamente? E se le mettessimo in fila fissa una dietro l'altra? Sai, come le auto Tesla nel tunnel della Boring Company di Elon Musk? La brutta notizia è: Elon Musk non può superare le limitazioni della fisica, anche il suo tunnel è soggetto a ingorghi del traffico in caso di alta domanda [Mor22]. La buona notizia è: se accoppi quelle auto elettriche insieme e le fai viaggiare secondo un programma fisso, diciamo ogni 3 minuti, funziona. Ma è stato in giro da secoli ed è chiamato metropolitana o metro. Una linea della metropolitana trasporta regolarmente 25 000 persone/h. Per far arrivare così tante persone al lavoro in auto, avremmo bisogno di un'autostrada con 9 corsie verso la città - e altre 9 corsie per lasciare la città di nuovo, per un totale di 18 corsie. Una corsia su un'autostrada tedesca [Bun09] ha una larghezza di 3.75 m, quindi ciò farebbe (inclusi i corsi di emergenza) un'autostrada larga più di 70 m. Immagina di spianare autostrade così gigantesche attraverso le nostre città da tutte le direzioni. Immagina il gigantesco costo della costruzione, del reinsediamento di migliaia di persone e della distruzione del patrimonio culturale e delle strutture economiche stabilite. C'è una ragione per cui le metropolitane funzionano meglio delle autostrade per il trasporto urbano. E la ragione di ciò si riduce alle leggi fisiche di accelerazione e decelerazione e alla matematica, come hai imparato.

4 Conclusioni

Abbiamo confrontato il nostro modello con osservazioni nel mondo reale e abbiamo trovato una concordanza molto stretta. In particolare, dimostriamo che una stessa strada può portare più persone al lavoro se il limite di velocità viene abbassato (e applicato) a 30 km h^{-1} perché gli spazi nel flusso del traffico sono più ridotti a velocità più basse. Il limite di velocità più basso rende il flusso più continuo, riducendo la frequenza degli ingorghi stradali, portando così a tempi di viaggio *più* brevi anche se la velocità massima è ridotta. Una città con un limite complessivo di 30 km h^{-1} non è solo più sicura, ma anche più confortevole per i conducenti perché riduce il tempo che perdono negli ingorghi stradali.

References

- [Bun09] Bundesministerium für Digitales und Verkehr. Richtlinien für die Anlage von Autobahnen (RAA). <https://bmdv.bund.de/SharedDocs/DE/Anlage/StB/ars-aktuell/allgemeines-rundschreiben-strassenbau-2009-07.pdf> *Allgemeines Rundschreiben Straßenbau*, 7, 2009.
- [Chr20] Johannes Christ. Datenanalyse: Autos werden nicht erst seit dem SUV-Boom größer. <https://www.rnd.de/wirtschaft/>

- datenanalyse-autos-werden-nicht-erst-seit-dem-suv-boom-grosser-6GTM66RRNJEC7EYHR3FQS7Y24Y.html, February 2020.
- [CK-23] CK-12 Foundation. Displacement During Uniform Acceleration. <https://flexbooks.ck12.org/cbook/ck-12-physics-flexbook-2.0/section/2.6/primary/lesson/displacement-during-constant-acceleration-phys/>, February 2023.
- [Eur15] European Environment Agency. Occupancy rates of passenger vehicles. <https://www.eea.europa.eu/data-and-maps/indicators/occupancy-rates-of-passenger-vehicles/occupancy-rates-of-passenger-vehicles>, August 2015.
- [Ger20] Saskia Gerhard. Das wissen wir über Tempolimits. <https://www.quarks.de/technik/mobilitaet/faq-tempolimits/>, January 2020.
- [Ins23] Institut für Unfallanalysen Hamburg. Brechstabelle A. <https://unfallanalyse.hamburg/index.php/ifu-lexikon/bremsen/brechstabelle-a/>, February 2023.
- [Mor22] Jack Morse. Oh look, it's a Tesla traffic jam in Las Vegas' Boring Company tunnel. <https://mashable.com/article/ces-las-vegas-boring-tunnel-tesla-traffic>, January 2022.
- [Rei22] Konrad Reif. *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*. Springer Vieweg, Wiesbaden Heidelberg, 30. Aufl. 2022 edition, May 2022.
- [The18] The National Institute for Occupational Safety and Health (NIOSH). Immediately Dangerous to Life or Health Concentrations (IDLH): Nitrogen dioxide. <https://www.cdc.gov/niosh/idlh/10102440.html>, November 2018.
- [Wik22] Wikipedia. Quotient rule. https://en.wikipedia.org/wiki/Quotient_rule, December 2022.