Vortrag im Arbeitsseminar Analysis und QM,
Montag, 19.7.2010 IADM Uni Stuttgart.

Die Existenz asymptotischer Felder in der nichtrelativistischen Quantenelektrodynamik (QED)

1. Zweite Quantisierung // Möglichkeit qm. Systeme mit variabler Teilchenzahl zu beschreiben
2. Nichtrel. QED // Theorie einer festen Zahl Elektronen wechselwirkend mit dem quant. em. Feld, d.h. einer variablen Zahl Photonen
3. Ex. asymptotischer Felder

1. Zweite Quantisierung

// Def.bereiche etc. hier ignorieren.

Sei h Hilbertraum (Einteilchen-HR).

n-Teilchen-HR: $\otimes^n h = h \otimes \dots \otimes h$. $\otimes^0 h := \mathbb{C}$.

Symmetrisierungsoperator:

Sei $\sigma \in S_n$ Permutation. Seien $\varphi_1, \dots \varphi_n \in h$.

Permut. op.: $\hat{\sigma}(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) := \varphi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{\sigma(n)}$.

Symm. op.: $S_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \hat{\sigma} \in \mathcal{L}(\otimes^n h)$.

Bosonischer Fockraum:

$$\mathcal{F}_s := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n(\otimes^n h).$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

Sei $\psi = (\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \dots) \in \mathcal{F}_s$, $\psi^{(n)} \in \otimes^n h$.

Definiere Operatoren: Sei $f \in h$.

$$(a^*(f)\psi)^{(n)} := n \cdot S_n(f \otimes \psi^{(n-1)})$$

// Erzeuger, fügt Teilchen hinzu

// Vernichter, entfernt Teilchen:

$$a(f) := (a^*(f))^*.$$

Anschaulich: $a(f)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)$

// ungenau eigentlich symm. L.komb., aber Notation klar zu halten.

$$= n \cdot \underbrace{\langle f, \varphi_1 \rangle}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n}_{\text{// (n-1)-Teilchen-Zustand}}$$

// symm. L.komb. ⇝ φ_1 wäre nicht mehr bevorzugt, ununtersch. Teilchen.

Es gelten die CCR:

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle_h \mathbb{1}$$

// Mult. mit komplexer Zahl $\langle f, g \rangle$ als Operator

$$[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$$

2. Nichtrelativist. QED

Ein ~einzelnes~ Elektron in bindendem Potential // z.B. Coulomb-Pot. eines Atomkerns

Quantisiertes em. Feld (Photonen)

// Elektron-HR: // Interpretation:

$$\mathfrak{H}_{el} := L^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \mathbb{R}^3 \text{ Ortsraum}$$

// Photonen — deren Anzahl durch WW verändert wird:

$$\mathcal{F}_s = \bigoplus_{n \geq 0} S_n \Big(\bigotimes^n \underbrace{L^2(\mathbb{R}^3}_{\text{Impulsraum}} \times \underbrace{\{1,2\}}_{\text{Polarisation / Helizität}}) \Big)$$

// Interpretation: ;

// zusätzlicher interner Freiheitsgrad. Ich werde den Index 1, 2 teilweise nicht ausschreiben, wo es nur die Notation unleserlicher macht.

// Gesamtsystem:

$$\mathfrak{H} := \mathfrak{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s .$$

Hamilton-Operator:

$$H := (\vec{p} \otimes \mathbb{1} + \vec{A})^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

$$= (\underbrace{\vec{p}}_{\substack{\text{Impuls } e^-, \\ -i\nabla_{\vec{x}}}} + \underbrace{\vec{A}}_{\text{WW.}})^2 + \underbrace{V}_{\text{Potential}} + \underbrace{H_f}_{\text{em. Feldenergie}}$$

Feldenergie: Sei $\Psi = (\Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \dots) \in \mathcal{F}_s$.

$$(H_f \Psi)^{(n)}(\vec{k}_1, \dots \vec{k}_n) := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|\vec{k}_j|}_{} \Psi^{(n)}(\vec{k}_1, \dots \vec{k}_n)$$

Energie von Photon j mit Impuls k_j:

$$\omega(\vec{k}_j) = \sqrt{\vec{k}_j^2 + m^2} \, . \quad m = 0$$

// Polarisationsindex 1,2 lasse ich hier einfach weg.

Wechselwirkung:

Sei $\varphi \otimes \eta \in \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s$. $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Dann $(\varphi \otimes \eta)(\vec{x}) := \underbrace{\varphi(\vec{x})}_{\in \mathbb{C}} \cdot \eta \in \mathcal{F}_s$;

Ausweiten auf alle $\Psi \in \mathfrak{H}$: $\Psi(\vec{x}) \in \mathcal{F}_s$.

Definiere so $\vec{A}\Psi$ durch:

$$(\vec{A}\Psi)(\vec{x}) := \left(a(\vec{G}_{\vec{x}}) + a^*(\vec{G}_{\vec{x}})\right)\Psi(\vec{x}),$$

wobei

$$\vec{G}_{\vec{x}}(\vec{k},\lambda) = \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2|\vec{k}|}}\,\underbrace{\vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)}_{\substack{\text{Polarisations-}\\ \text{vektoren,}\\ \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)\perp\vec{k}.}}\;\underbrace{\kappa(|\vec{k}|)}_{\substack{\text{UV-Cutoff,}\\ \frac{\kappa(k)}{\sqrt{k}}\in L^2\\ \text{// da } a,\,a^* \text{ nur}\\ \text{für } G_x(k)\in L^2\\ \text{definiert sind.}}}$$

Interpretation: $a(\vec{G}_{\vec{x}}) + a^*(\vec{G}_{\vec{x}})$ ist // bis auf den Cutoff
das // quantisierte
em. Vektorpot. an der
Elektronkoordinate $\vec{x}$.

3. Existenz asymptotischer Felder

3.1 Motivation:

Sei $\Sigma :=$ Ionisierungsschwelle

$=$ minimale Energie, um das Elektron aus dem bindenden Pot. zu lösen.

Sei $\Psi \in \chi(H < \Sigma)\mathcal{H} = \chi(H < \Sigma)(\mathcal{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s)$.

Phys. Beobachtung: Ψ zerfällt in GZ des Atoms und frei wegfliegende Photonen.

$\rightsquigarrow$ Vermutung: $\exists h_1, \ldots h_n \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$:

$$\| \underbrace{e^{-iHt}\Psi}_{\text{volle Zeitentwicklung}} - \underbrace{e^{-iH_f t} a^*(h_1) e^{iH_f t}}_{\text{Photon in Zstd. } h_1} e^{-iH_f t} a^*(h_2) e^{iH_f t} \cdots e^{-iH_f t} a^*(h_n) e^{iH_f t} \underbrace{e^{-iHt}\Phi_{gs}}_{\text{Zeitentw. des GZ;}} \|$$

$\longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$

$H_f \mathrel{\hat{=}}$ reine Energie des Photonenfeldes, H_f erzeugt also freie, nicht-ww. Ausbreitung der Photonen

$= e^{-iE_{gs}t}\Phi_{gs}$

// denn Φ_{gs} ist stabil gegen Zerfall, also ein stationärer Zustand, ein Eigenz. von H, dem Gesamt-Hamiltonian samt WW.

Offene Vermutung! „Asymptotic Completeness of Rayleigh Scattering".

// Einfachere Frage; wenn wir schon nicht zeigen können, dass alle Zustände das erfüllen:

Existieren überhaupt Zustände Ψ mit

$$\| e^{-iHt}\Psi - e^{-iH_f t} a^*(h_1) e^{iH_f t} e^{-iHt} \Phi_{gs} \| \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)?$$

// Unitarität von e^{iHt}:

$$= \| \Psi - e^{iHt} e^{-iH_f t} a^*(h_1) e^{iH_f t} e^{-iHt} \Phi_{gs} \|.$$

$\rightsquigarrow$ Frage: Existiert $h_1 \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$, so dass

$$\underbrace{\lim_{t \to \infty} e^{iHt} e^{-iH_f t} a^*(h_1) e^{iH_f t} e^{-iHt} \Phi_{gs}}_{a_+^*(h_1)\Phi_{gs}} \text{ ex.?}$$

asymptot. Erzeuger

// Ziel des Vortrags: Beweise Existenz dieses Limes.
Dazu werde ich jetzt heuristisch einige Lemmata einführen.

3.2 Existenzbeweis:

Lemma 1: Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$. Sei ω der Mult. op. $(\omega f)(\vec{k},\lambda) := |\vec{k}|\, f(\vec{k},\lambda)$, $\lambda \in \{1,2\}$.

Dann $\underline{e^{-iH_p t}\, a^*(f)\, e^{iH_p t}\phi = a^*(e^{-i\omega t} f)\phi}$, $\phi \in \mathcal{U}_{el} \otimes \mathcal{F}_s$.

// Heuristik:

l.h.s.:
- $e^{iH_p t}$ zeitentwickelt alle Photonen in ϕ um t Richtung Vergangenheit
- fügt dann Photon in Zustand f hinzu
- und entwickelt alle Photonen, inkl. f, wieder in die Zukunft

$\rightsquigarrow$ Photonen in ϕ unverändert, nur f wurde in die Zukunft entwickelt.

r.h.s.:
- es wird direkt f allein mit seiner Einteilchenenergie ω in die Zukunft entwickelt.

// all dies nur wörtlich

Lemma 2: Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})$.

Sei $\sum_{\lambda=1,2} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) f(\vec{k},\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$.

// als Funktion von $\vec{k}$

Sei $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

(i) $$|\langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f\rangle| \leq \frac{C_{m,\varepsilon}}{1+|t|^m} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$$ mit $\left|\frac{|x|}{|t|} - 1\right| \geq \varepsilon$.

(ii) Ferner: $$|\langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f\rangle| \leq \frac{C}{|t|} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t \neq 0.$$

Heuristik: Es ist

$$\langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1,2\})} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \, \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) \kappa(|\vec{k}|) \cdot e^{-i|\vec{k}|t} f(\vec{k},\lambda)$$

$$= \underbrace{\int d^3k \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}_{\text{Fourierrücktrafo } \mathcal{F}^{-1} \text{ in den Ortsraum}} \underbrace{e^{-i|\vec{k}|t}}_{\text{Zeitentwicklung der Photonwellenfkt.}} \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) f(\vec{k},\lambda) \frac{\kappa(|\vec{k}|)}{\sqrt{2|\vec{k}|}}}_{=: \vec{g}(\vec{k}), \text{ Photonwellenfkt.}} \qquad (*)$$

//

Photonen haben Lichtgeschw. $c = 1$.

$\rightsquigarrow$ weg vom Lichtkegel, $\frac{|x|}{|t|} \neq c = 1$, ist die Photonwellenfkt. im Ortsraum ≈ 0. $\rightsquigarrow$ (i).

Auf dem Lichtkegel:

$$\| e^{-i\omega t} f \|_{L^2}^2 = \| f \|_{L^2}^2 = \text{konst.}$$

$$\| $$

$$\int | \mathcal{F}^{-1} [e^{-i|\vec{k}|t} f] (\vec{x}) |^2 d^3x \qquad \text{// vgl. auch } (*)$$

$$\overset{(i)}{\approx} \int_{\frac{|x|}{t} \approx 1} | \text{— " —} |^2 d^3x$$

$$\approx | \mathcal{F}^{-1} [e^{-ikt} f] (\vec{x}) |^2 \cdot \underbrace{(\text{Kugeloberfläche, Radius } |\vec{x}| = t)}_{\sim t^2}$$

$$\rightsquigarrow | \mathcal{F}^{-1} [e^{-ikt} f] (\vec{x}) |^2 \sim \frac{1}{t^2}. \quad \rightsquigarrow (ii).$$

Lemma 3: Mit der Identifikation $\psi \in \mathfrak{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F}_s$ zu $\psi(\vec{x}) \in \mathcal{F}_s$ ist

$$\|\psi\|^2_{\mathfrak{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s} = \int d^3x \, \|\psi(\vec{x})\|^2_{\mathcal{F}_s} .$$

Es gibt $\delta > 0$ sodass

$$\|e^{\delta|\cdot|} \Phi_{gs}\| = \int d^3x \, \|e^{\delta|\vec{x}|} \Phi_{gs}(\vec{x})\|^2 < \infty .$$

// d.h. Φ_{gs} fällt exponentiell ab.

// Bew.: 1. Aussage Defs. ansehen und nachrechnen.

2. Aussage: ähnliches für QM z.B. in MMQM 1 gesehen. braucht Idee, könnte Extra-Vortrag sein.

Lemma 4: Sei $\sum_{\lambda=1,2} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) f(\vec{k},\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt für alle $t > 0$: $(j = 1,2,3)$

$$\int d^3x \, |\langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle|^2 \, \|\Phi_{gs}(x)\|^2_{\mathcal{F}_s} \leq \frac{C_{n,j}}{t^n}$$

// verkürzte Notation:

$$= \| \langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle \, \Phi_{gs} \|^2_{\mathfrak{H}_{el} \otimes \mathcal{F}_s}$$

// Multi-op. bez. $\vec{x}$-Koordinate zu verstehen.

Bew.:

$$\int d^3x \, |\langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle|^2 \, \|\Phi_{gs}(x)\|^2_{\mathcal{F}_s}$$

$$= \int d^3x \, |\langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle|^2 \underbrace{\left(\chi_{B_{t/2}(0)}(\vec{x}) + \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{t/2}(0)}(\vec{x}) \right)^2}_{\text{// zusammen } = 1}$$

$$\times \underbrace{\left(e^{-\delta|\vec{x}|}\right)^2 \|e^{\delta|\vec{x}|} \Phi_{gs}(\vec{x})\|^2_{\mathcal{F}_s}}_{\text{// einfügen und kompensieren}}$$

$$= \int d^3x \Big(\underbrace{|\langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle| \, \chi_{B_{t/2}(0)}(\vec{x})}_{\le C/|t|^k} \, \underbrace{e^{-\delta|\vec{x}|}}_{\le 1}$$

// weg vom Lichtkegel, haben gesehen:

$$+ \underbrace{|\langle G^{(j)}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t} f \rangle|}_{\le \frac{C}{|t|}} \, \underbrace{\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{t/2}(0)}(\vec{x}) \, e^{-\delta|x|}}_{|\vec{x}| \geq t/2 \Rightarrow \, \le e^{-\delta t/2}} \Big)^2 \, \|e^{\delta|x|} \Phi_{gs}(\vec{x})\|^2_{\mathcal{F}_s}$$

// inkl. Lichtkegel. Haben nur noch:

$$\boxed{\le C/t^{k-1}}$$

$$\leq \frac{C}{t^{2k}} \underbrace{\int d^3x \, \|e^{\delta|x|} \Phi_{gs}(\vec{x})\|^2_{\mathcal{F}_s}}_{= \text{konst.} < \infty \text{ nach Lm. 3}} .$$

Theorem 5: Sei $\sum_{\lambda=1,2} \vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda) f(\vec{k},\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{C}^3)$.

Dann existiert

$$a_+^*(f)\phi_{gs} = \lim_{t\to\infty} e^{iHt} e^{-iH_f t} a^*(f) e^{iH_f t} e^{-iHt} \phi_{gs}$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{iHt} \quad a^*(e^{-i\omega t} f)\, e^{-iHt} \phi_{gs}.$$

Beweis:

Idee: Verwende Cook-Argument:

Um zu zeigen, dass $\lim_{t\to\infty} f(t)$, $f: \mathbb{R} \to \mathcal{H}$,

ex., gzz:

$$\| f(T_2) - f(T_1) \| \longrightarrow 0 \quad (T_1, T_2 \longrightarrow \infty) \qquad (*)$$

(Cauchy)

Es ist $\| f(T_2) - f(T_1) \|$

$$= \left\| \int_{T_1}^{T_2} \frac{df}{dt}(t)\, dt \right\|$$

$$\leq \int_{T_1}^{T_2} \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\| dt.$$

Damit $(*)$ gilt, genügt also zu zeigen

$$\int_1^\infty \left\| \frac{df}{dt}(t) \right\| dt < \infty.$$

Hier:

$$\left\| \frac{d}{dt} \left[e^{iHt} e^{-iH_f t} a^*(f) e^{iH_f t} e^{-iHt} \phi_{gs} \right] \right\|$$

// Produktregel
für 4 Terme

$$= \| e^{iHt}\, iH\, e^{-iH_f t} a^*(f) e^{iH_f t} e^{-iHt} \phi_{gs}$$

$$+ e^{iHt} (-iH_f) e^{-iH_f t} a^*(f) e^{iH_f t} e^{-iHt} \phi_{gs}$$

$$+ e^{iHt} \underbrace{e^{-iH_f t} a^*(f) e^{iH_f t}}_{= a^*(e^{-i\omega t} f) \quad // \text{Lem. 1}} (iH_f - iH) e^{-iHt} \phi_{gs} \|$$

// auf vzs
hinweisen
cs Kommutator

$$= \| \underbrace{e^{iHt}}_{\text{unitär}}\, i [H - H_f, a^*(e^{-i\omega t} f)]\, \underbrace{e^{-iHt} \phi_{gs}}_{= e^{-iE_{gs} t} \phi_{gs}} \|$$

$$= \| [H - H_f, a^*(e^{-i\omega t} f)] \phi_{gs} \|$$

$$= \| [(\vec{p} + \vec{A})^2 + V, a^*(e^{-i\omega t} f)] \phi_{gs} \|$$

// V wirkt nur in $\mathcal{H}_{el}$, kommutiert also mit a^*.
bleibt $(p+A)^2$; und das schreiben wir

$$= \| (\vec{p}+\vec{A})\cdot[(\cancel{\vec{p}}+\vec{A}), a^*(e^{-i\omega t}f)]\phi_{gs}$$
$$+ \underbrace{[\vec{A}, a^*(e^{-i\omega t}f)]}\cdot(\vec{p}+\vec{A})\phi_{gs} \|$$

//wenn wir die e^--Koordinate wieder mit f's ausschreiben, dann würde hier stehen:

$$= [a(\vec{G}_{\vec{x}}) + a^*(\vec{G}_{\vec{x}}), a^*(e^{-i\omega t}f)]$$

$$= \langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t}f \rangle$$

$$\leq \| (\vec{p}+\vec{A})\cdot\langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t}f\rangle \phi_{gs}\| + \|\langle \vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec{p}+\vec{A})\phi_{gs}\|$$

Man stellt fest: Wegen $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)=0$ ist $\vec{p}\cdot\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle = \langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle\cdot\vec{p}$.
//schreibe dazu $\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle$ als Integral und $\vec{p}$ als $-i\vec{\nabla}$.
⇝ es genügt abzuschätzen:

$$\|\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec{p}+\vec{A})\phi_{gs}\|^2 = \langle \sum_{j=1}^3 (p_j+A_j)\langle G_{\vec{x}}^{(j)}, e^{-i\omega t}f\rangle\phi_{gs}, \sum_{i=1}^3 \langle G_{\vec{x}}^{(i)}, e^{-i\omega t}f\rangle(p_i+A_i)\phi_{gs}\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^3 \langle \langle G_{\vec{x}}^{(j)}, e^{-i\omega t}f\rangle\phi_{gs}, (p_j+A_j)\sum_{i=1}^3\langle G_{\vec{x}}^{(i)}, e^{-i\omega t}f\rangle(p_i+A_i)\phi_{gs}\rangle$$

$$\leq \sum_{j=1}^3 \underbrace{\|\langle G_{\vec{x}}^{(j)}, e^{-i\omega t}f\rangle\phi_{gs}\|}_{\leq C/t^n}\cdot\|(p_j+A_j)\langle\vec{G}_{\vec{x}}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec{p}+\vec{A})\phi_{gs}\|$$

und es bzz: $\|(p_j+A_j)\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec{p}+\vec{A})\phi_{gs}\| \leq C_j < \infty$. //detaillierter siehe Anhang

Kommutiere dazu (p_j+A_j) an $\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle$ vorbei. Dann stehe vorne $\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle$ bzw. $\frac{\partial}{\partial x_j}\langle\vec{G}_{\vec{x}},e^{-i\omega t}f\rangle$. Beides sind $\vec{x}$-unabhängig- und t-unabhängig-beschränkte Operatoren. Es bzz: $\phi_{gs}\in D(p_j+A_j)$ und $\phi_{gs}\in D((p_j+A_j)(p_i+A_i))$ für $i,j=1,2,3$. Ersteres folgt aus zweiterem. Zweiteres ist für $j=i$ klar da $\phi_{gs}\in D(H)$;

falls $\sqrt{k}\,\kappa(k)\in L^2$

für $i\neq j$ mittels Bezug auf Hasler, Herbst: math-ph 0704.1413v1 leicht zeigbar.

$$\Longrightarrow \|\frac{d}{dt}[e^{iHt}e^{-iH_ft}a^*(f)e^{iH_ft}e^{-iHt}\phi_{gs}]\| \leq \frac{C}{t^{k/2}}, k\in\mathbb{N};$$

dies ist für $k>2$ gewählt auf $[1,\infty]$ integrierbar,
nach dem Cook-Argument existiert also der Limes. ∎

// Um das Thm. und den Beweis nochmals zusammenzufassen: Wir haben verwendet

1. Photonen breiten sich nur auf dem Lichtkegel aus
2. Der GZ ist im Raum exp. abfallend.

Zusammengenommen heißt das: die WW zwischen e^- und Photonen nimmt für große Zeiten schnell ab. Deshalb gibt es Zustände, in denen Photonen wegfliegen und das Elektron in den Grundzustand relaxiert.

Abzuschätzen: $\| (\vec p + \vec A)\cdot \langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t} f\rangle\, \phi_{gs}\|$

$= \| \langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t} f\rangle \cdot (\vec p+\vec A)\,\phi_{gs}\|$.

Es ist $\|\langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t} f\rangle\cdot(\vec p+\vec A)\,\phi_{gs}\|^2$

$$= \Big\langle \sum_{j=1}^3 (p_j+A_j)\langle G^{(j)}_{\vec x}, e^{-i\omega t} f\rangle\, \phi_{gs}, \sum_{i=1}^3 \langle G^{(i)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle (p_i+A_i)\phi_{gs}\Big\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^3 \Big\langle \langle G^{(j)}_{\vec x}, e^{-i\omega t} f\rangle\,\phi_{gs},\ (p_j+A_j)\sum_{i=1}^3 \langle G^{(i)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle(p_i+A_i)\phi_{gs}\Big\rangle$$

$$\le \sum_{j=1}^3 \underbrace{\|\langle G^{(j)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\,\phi_{gs}\|}\cdot \|(p_j+A_j)\,\langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec p+\vec A)\phi_{gs}\|$$

$\boxed{\text{Lemma 4}} \longrightarrow\ \le \dfrac{C}{t^n}$, das gewünschte Abfallverhalten.

Es bzz: $\|(p_j+A_j)\,\langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec p+\vec A)\phi_{gs}\| \le C_j < \infty$.

Schreibe dazu:

$$\|(p_j+A_j)\,\langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec p+\vec A)\,\phi_{gs}\|^2$$

$$= \int d^3x\ \Big\|\Big(-i\frac{\partial}{\partial x_j} + A_j(\vec x)\Big)\langle \vec G_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\cdot(\vec p+\vec A(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\Big\|^2$$

$$= \int d^3x\ \Big\|\sum_{i=1}^3 \langle G^{(i)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\, (p_j + A_j(\vec x))\,(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \underbrace{\Big[-i\frac{\partial}{\partial x_j}, \langle G^{(i)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle\Big]}(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\Big\|^2$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial x_j}\int d^3k \sum_{\lambda=1,2}\frac{e^{i\vec k\cdot\vec x}}{\sqrt{2k}}\,\varepsilon^{(i)}(\vec k,\lambda)\,\kappa(k)\,e^{-ikt}\,\vec f(\vec k,\lambda)$$

$$= \cancel{i}\int d^3k\ \frac{e^{i\vec k\cdot \vec x}}{\sqrt{2k}}\ \underbrace{\sum_{\lambda=1,2}\cancel{i}\,k_j\ \varepsilon^{(i)}(\vec k,\lambda)\,\kappa(k)\,f(\vec k,\lambda)\ e^{-ikt}}_{\text{bzgl. } \vec k \text{ eine } C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\text{-Funktion}}$$

↳ ganzes Integral hat $|\int d^3k\,(\ldots)|$ $\boxed{\le C_i < \infty}$ (e^{-ikt}, $e^{i\vec k\cdot\vec x}$ spielen ja in $|\cdot|$ keine Rolle)

$$\le \int d^3x\ \Big(\sum_{i=1}^3 \|\overbrace{\langle G^{(i)}_{\vec x}, e^{-i\omega t}f\rangle}^{|\cdot|\le \tilde C_i}(p_j+A_j(\vec x))\cdot(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\| + C_i\,\|(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\|\Big)^2$$

$$\le \int d^3x\ \Big(\sum_{i=1}^3 \tilde C_i\, \|(p_j+A_j(\vec x))\cdot(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\| + C_i\,\|(p_i+A_i(\vec x))\,\phi_{gs}(\vec x)\|\Big)^2$$

falls $\phi_{gs} \in D((p_j+A_j)(p_i+A_i))$ ~~$\cap\, D(p_i+A_i)$~~, $(\forall i,j=1,2,3)$ // für $j=i$ ist das klar. Für $j\neq i$?

Dann sind wir fertig.

Anhang ②

zz: $\phi_{gs} \in D((p_j + A_j)(p_i + A_i))$. → Verwende Hasler-Herbst, self-ad. and domain of PF-Hamiltonian math-ph:0407.1413

Bekannt: ϕ_{gs} ist EV von H, $D(H) = D(p^2 + H_f)$.
↳ $\phi_{gs} \in D(H)$

$\subset D((p + A)^2 + H_f)$

$\subset D((\vec{p} + \vec{A})^2)$,

sowie $D(p^2 + H_f) \subset D(p^2)$

Also für $j = i$ klar:

$$\phi_{gs} \in D((\vec{p} + \vec{A})^2) \subset D((p_j + A_j)^2)!$$

Bew: $\phi_{gs} \in D((p_i + A_i))$ ist klar, da $\phi_{gs} \in D(H)$.

$j \neq i$:

$$(p_j + A_j)(p_i + A_i) = p_j p_i + p_j A_i + A_j p_i + A_j A_i.$$

$$\| p_j p_i \phi_{gs} \|^2 = \langle p_j p_i \phi_{gs}, p_j p_i \phi_{gs} \rangle \overset{j \neq i}{=} \langle p_j^2 \phi_{gs}, p_i^2 \phi_{gs} \rangle \leq \| p_j^2 \phi_{gs} \| \cdot \| p_i^2 \phi_{gs} \| < \infty$$

da $\phi_{gs} \in D(p^2)$.

//genauer überlegen. ⇝ $\phi_{gs} \in D(p_j p_i)$,

$$p_j A_i \phi_{gs} = -i \phi(\underbrace{\partial_j G_i}_{= \frac{e^{-ik \cdot x}}{\sqrt{2k}} \bar{\varepsilon}(k, \lambda) \cdot (-i k_j) \varkappa(k)}) \phi_{gs} + A_i p_j \phi_{gs}$$

nach Voraussetzung $\sqrt{k} \cdot \varkappa(k) \in L^2$
⇝ $\phi(\partial_j G_i)$ wohldef.
und $D(\phi(\partial_j G_i)) \supset D(H_f)$
und $\phi_{gs} \in D(H_f)$.

bzz: $p_j \phi_{gs} \in D(A_i)$ und $\phi_{gs} \in D(A_j A_i)$.

Es ist $\phi_{\varrho'} \in D(H_f) \subset D(H_f^{1/2}) \subset D(\Phi(\vec{G}))$

$= D(\vec{A})$.

Insbes. $D(H_f^{1/2}) \subset D(\Phi(h_1)\,\Phi(h_2))$

$\stackrel{z.B.}{=} D(A_i A_j)$.

bzw.: $p_i \phi_{\varrho'} \in D(A_i)$.

Es ist $[p_i, H_f^{1/2}] = 0$. (wirken ja auf versch. Räume)

$\Rightarrow p_i \phi_{\varrho'} \in D(H_f^{1/2}) \subset D(\Phi(\vec{G})) = D(\vec{A})$

$= D(A_1) \cap D(A_2) \cap D(A_3)$.

$\Rightarrow p_i \phi_{\varrho'} \in D(A_i)$.

$\blacksquare$