Fisica Matematica 3

Meccanica Statistica

Appello 12/7/2022

Esercizio 1: Oscillatore armonico classico e quantistico

Consideriamo un singolo oscillatore armonico (classico), descritto dall'Hamiltoniana

$$H(p,q) := \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 ,$$

per momento $p \in \mathbb{R}$ e posizione $q \in \mathbb{R}$, la massa $m > 0$, e $\omega > 0$. L'oscillatore viene messo in contatto con un gas di temperatura inversa $\beta > 0$.

a. Calcolare la media dell'energia dell'oscillatore (classico).
(Si può usare che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.)

b. Adesso consideriamo l'oscillatore armonico quantistico, vuol dire che p diventa l'operatore del momento e q l'operatore della posizione: l'equazione di Schrödinger allora è

$$H\psi = E\psi , \quad \text{con l'operatore Hamiltoniano } H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 .$$

Calcolare la media dell'energia dell'oscillatore quantistico.

Esercizio 2: Un modello di Ising modificato

Consideriamo una modificazione del modello di Ising *in dimensione* $d = 1$ sull'insieme $\Lambda_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ con n pari e con condizioni al contorno periodiche, per temperatura inversa $\beta \geq 0$ e campo magnetico esterno $h \in \mathbb{R}$:
diversamente del modello visto a lezione consideriamo qui *l'accoppiamento tra primi vicini che dipende dalla posizione*: la costante di accoppiamento è

$$J_{i,i+1} = \begin{cases} 1 & \text{per } i \text{ pari} \\ -1 & \text{per } i \text{ dispari,} \end{cases}$$

allora

$$\mathcal{H}^{\text{per}}_{\Lambda_n,\beta,h}(\omega) = -\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}^{\text{per}}_{\Lambda_n}} J_{i,j}\, \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega) .$$

a. Ottenere una rappresentazione del tipo "transfer matrix" della funzione di partizione $Z(\Lambda_n, \beta, h)$ (anche per $h \neq 0$).

b. Calcolare esplicitamente $Z(\Lambda_n, \beta, 0)$ per $h = 0$.

c. Calcolare il limite termodinamico dell'energia libera $\psi(\beta, 0)$ per $h = 0$.

d. Consideriamo ancora $h = 0$. Esiste una transizione di fase? Spiegare perché si o no.

Appello 12/7/2022 – Es. 2d

Stesso metodo usato per Es. 2 dell 6/2022: si rappresenta σ_0 con una matrice per calcolare $\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,0} = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{Z}} \langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,0}$.

(Se $\langle\sigma_0\rangle^+_{\beta,0} = 0$ $\forall \beta \geq 0$: non c'è la transizione di fase.)

Ingredienti nuovi:

- invece di una matrice A abbiamo A e A' (pari/dispari), come Es. 2a-c.
- condizioni al contorno "+" invece di periodiche!

Usiamo $B_{2n}\uparrow\mathbb{Z}$, $B_{2n} = \{-2n, -2n+1, \dots, 2n-1, 2n\}$, perché $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}$.

Usare $2n$ invece di n permette di evitare discussione di due casi (n pari/dispari).

$$\mathcal{H}^+_{B_{2n},\beta,0}(\omega) = -\beta \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{E}^b_{B_{2n}}} \sigma_i(\omega)\,\sigma_j(\omega)\, J_{ij}$$

con $\mathcal{E}^b_{B_{2n}} = \{\{i,i+1\} : i \in \mathbb{Z}\cap[-2n, 2n-1]\}$.

Condizioni al contorno: $\omega_{-2n} = \omega_{2n} = +1$.

Allora:

$$Z \langle \sigma_0 \rangle^+_{B_{2n,1,0}} = \sum_{\omega_{-2n} \in \{\pm 1\}} \cdots \sum_{\omega_{2n} \in \{\pm 1\}} \sigma_0(\omega)\, e^{\mathcal{H}^+_{B_{2n,1,0}}(\omega)}$$

anche da calcolare, stesso metodo

$$= \sum_{\omega_{-2n}} \cdots \sum_{\omega_{2n}} e^{+\beta\omega_{-2n}} \prod_{\substack{j=-2n,\\ \text{solo } j \text{ pari}}}^{-2} \left(e^{-\beta\omega_j\omega_{j+1}}\, e^{+\beta\omega_{j+1}\omega_{j+2}} \right)$$

questo è il termine di interazione col contorno $\omega_{-2n-1} = +1$, con $J_{-2n-1,-2n} = -1$.

$$\times\, S_{\omega_0} \prod_{\substack{j=0\\ \text{solo } j \text{ pari}}}^{2n-2} \left(e^{\beta\omega_j\omega_{j+1}}\, e^{-\beta\omega_{j+1}\omega_{j+2}} \right)$$

$$\times\, e^{-\beta\omega_{2n}}$$

termine di contorno

matrice diagonale $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, rappresenta $\sigma_0(\omega)$

$$= \langle u, (A^- A^+)^n S (A^+ A^-)^n \tilde{u} \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

con il vettore $u = \begin{pmatrix} e^{\beta} \\ e^{-\beta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$\tilde{u} = \begin{pmatrix} e^{-\beta} \\ e^{\beta} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$A^- = \begin{pmatrix} e^{-s} & e^{s} \\ e^{s} & e^{-s} \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} e^{s} & e^{-s} \\ e^{-s} & e^{s} \end{pmatrix}.$$

(Si calcola $A^- A^+$ e vede che $= A^+ A^-$.)

Allora si può diagonalizzare con la <u>stessa</u> matrice V allo stesso tempo A^- e A^+:

$$V A^- V^T = \begin{pmatrix} \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \end{pmatrix}$$

$$V A^+ V^T = \begin{pmatrix} \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \end{pmatrix}.$$

Avendo calcolato V si ottiene:

$$\langle u, (A^- A^+)^n S (A^+ A^-)^n \tilde{u} \rangle$$

$$= \langle u, V^T V (A^- A^+)^n S (A^+ A^-)^n V^T V \tilde{u} \rangle$$

$$= \langle V u, (V A^- V^T \, V A^+ V^T)^n V S V^T (V A^+ V^T \, V A^- V^T)^n V \tilde{u} \rangle$$

$$= \langle V u, \begin{pmatrix} \lambda_1^- \lambda_1^+ & 0 \\ 0 & \lambda_2^- \lambda_2^+ \end{pmatrix}^n V S V^T \begin{pmatrix} \lambda_1^+ \lambda_1^- & 0 \\ 0 & \lambda_2^+ \lambda_2^- \end{pmatrix}^n V \tilde{u} \rangle$$

$$= \langle V u, \begin{pmatrix} (\lambda_1^- \lambda_1^+)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2^- \lambda_2^+)^n \end{pmatrix} V S V^T \begin{pmatrix} (\lambda_1^+ \lambda_1^-)^n & 0 \\ 0 & (\lambda_2^+ \lambda_2^-)^n \end{pmatrix} \times V \tilde{u} \rangle$$

Si calcola esplicitamente gli autovalori (in realtà già otte in Es. 2 a-

e la matrice V,

con V si calcola Vu, $V\tilde{u} \in \mathbb{R}^2$

e $VSV^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

e allora il prodotto scalare $\langle , \rangle$ in $\mathbb{R}^2$.

∎