

Fisica Matematica 3

Meccanica Statistica

Appello 23/6/2022

Esercizio 1: Gas ideale con dispersione di ordine quattro

Sia $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ misurabile. Consideriamo il gas di N particelle con l'Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \sum_{i=1}^N |p_i|^4,$$

per $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ e $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \in \Lambda^N$. Scriviamo $V := |\Lambda|$.

a. Dimostrare che la funzione di partizione canonica è

$$Z(N, \beta, V) = \frac{1}{N!} (V \beta^{-3/4} I)^N \quad \text{con} \quad I := 4\pi \int_0^\infty e^{-p^4} p^2 dp.$$

b. Calcolare l'entropia $S(N, E, V)$.

Esercizio 2: Modello di Ising

Consideriamo il modello di Ising in dimensione $d = 1$ sull'insieme $\Lambda_n := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ con condizioni al contorno periodiche, per temperatura inversa $\beta \geq 0$ e campo magnetico esterno $h \in \mathbb{R}$.

a. Per $r \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z}$: Ottenere la rappresentazione con la matrice di trasferimento (“transfer matrix”) del valore atteso

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}.$$

(In parte a. è sufficiente ottenere una formula in cui tutte le quantità sono rappresentate come matrici, non vengono chiesti ulteriori passi.)

b. Per $h = 0$: dimostrare che

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle_{\Lambda_n, \beta, 0}^{\text{per}} = \frac{(e^\beta - e^{-\beta})^r (e^\beta + e^{-\beta})^{n-r} + (e^\beta + e^{-\beta})^r (e^\beta - e^{-\beta})^{n-r}}{(e^\beta + e^{-\beta})^n + (e^\beta - e^{-\beta})^n}.$$

Esercizio 1: $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$,

Soluzione Appello 23/6/2022

①

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^N |p_i|^4, \quad V := |\Lambda|.$$

Punti:

a $Z(N, \beta, V) = \frac{\int_{\mathbb{R}^{3N} \times \Lambda^N} dp dq}{N!} e^{-\beta H(p, q)}$ definizione ②

$$= \frac{1}{N!} \int_{\Lambda^N} dq \int_{\mathbb{R}^{3N}} dp e^{-\beta \sum_{i=1}^N |p_i|^4}$$

$$= \frac{1}{N!} |\Lambda|^N \int_{\mathbb{R}^3} dp_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} dp_N \prod_{i=1}^N e^{-\beta |p_i|^4}$$

$$= \frac{1}{N!} |\Lambda|^N \left(\int_{\mathbb{R}^3} dp e^{-\beta |p|^4} \right)^N \quad (\dots)^N \text{ ①}$$

$$= \frac{1}{N!} |\Lambda|^N \left(\int_0^\infty dp \, 4\pi p^2 e^{-\beta p^4} \right)^N \quad \begin{matrix} \text{coord.} \\ \text{sterile} \end{matrix} \text{ ①}$$

Sostituzione:

$$\tilde{p} := \beta^{1/4} p \quad dp = \beta^{-1/4} d\tilde{p}$$

sostituz. ①

$$= \frac{1}{N!} |\Lambda|^N \left(\int_0^\infty d\tilde{p} \, \beta^{-1/4} 4\pi \beta^{-3/4} \tilde{p}^2 e^{-\tilde{p}^4} \right)^N$$

$$= \frac{1}{N!} \left(|\Lambda| \beta^{-3/4} 4\pi \underbrace{\int_0^\infty d\tilde{p} \, \tilde{p}^2 e^{-\tilde{p}^4}}_{=I} \right)^N$$

$$= \frac{1}{N!} (V \beta^{-3/4} I)^N$$

b) Usiamo la trasformata di Legendre.

(2)

Ci serve la relazione tra E e β .

$$E = \langle H \rangle_{\beta, N, V}$$

(1)

$$= - \frac{\partial Z}{\partial \beta} (N, \beta, V) \cdot Z(N, \beta, V)^{-1}$$

(1)

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} (N, \beta, V) = \frac{1}{N!} V^N I^N \left(-\frac{3}{4} N \right) \beta^{-\frac{3}{4} N - 1}$$

$$Z(N, \beta, V) = \frac{1}{N!} V^N \beta^{-\frac{3}{4} N} I^N$$

$$E = - \frac{\partial Z}{\partial \beta} (N, \beta, V) Z(N, \beta, V)^{-1}$$

$$= - \frac{\frac{1}{N!} V^N I^N \left(-\frac{3}{4} N \right) \beta^{-\frac{3}{4} N - 1}}{\frac{1}{N!} V^N I^N \beta^{-\frac{3}{4} N}}$$

Calcolare E

$$= \frac{3}{4} N \beta^{-1} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{3}{4} \frac{N}{E}$$

~~Scrivere β in funzione di E~~

Trasformata di Legendre:

$$S(N, E, V) = -\beta F(N, \beta, V) + \beta E$$

(1)

dove β è scritto come funzione di E .

L'energia libera era $F(N, \beta, V) = -\frac{1}{\beta} \log Z(N, \beta, V)$

$$S(N, E, V) = -\beta \left(-\frac{1}{\beta}\right) \log Z(N, \beta, V) + \beta E$$

$$= \log Z(N, \beta, V) + \frac{3}{4} \frac{N}{E} \cdot \cancel{E}$$

$$= \log \left(\frac{1}{N!} V^N I^N \left(\frac{3}{4} \frac{N}{E} \right)^{-\frac{3}{4} N} \right) + \frac{3}{4} N$$

ne dépende
de β

①



Esercizio 2

(4)

(usando la notazione della lezione)

Q

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}$$

$$= \sum_{\omega_0 = \pm 1} \sum_{\omega_1 = \pm 1} \dots \sum_{\omega_{n-1} = \pm 1} \sigma_0 \sigma_r e^{-H_\beta(\omega)} / Z \quad (1)$$

$$Z = \sum_{\omega_0 = \pm 1} \dots \sum_{\omega_{n-1} = \pm 1} e^{-H_\beta(\omega)}$$

$$= \sum_{\omega_0 = \pm 1} \dots \sum_{\omega_{n-1} = \pm 1} e^{\beta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \omega_{i+1} + h \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i} \quad (1)$$

↑
con ω_n da leggere come ω_0

(condizioni al contorno periodiche)

$$= \sum_{\omega_0 = \pm 1} \dots \sum_{\omega_{n-1} = \pm 1} \prod_{i=0}^{n-1} e^{\beta \omega_i \omega_{i+1} + h \omega_i}$$

$$=: A_{\omega_i, \omega_{i+1}}$$

$$= \text{tr } A^n$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta+h} & e^{-\beta+h} \\ e^{-\beta-h} & e^{\beta-h} \end{pmatrix}$$

(la matrice di trasferimento).

(1)

⑤

σ_0 e σ_r sono da leggere

come matrici diagonali (il numero ①

di somme $\sum_{\omega_i = \pm 1}$ non è cambiato,

allora dobbiamo avere delle δ di Kronecker).

$$\sigma_0 = \begin{cases} +1 & \text{se } \omega_0 = +1 \\ -1 & \text{se } \omega_0 = -1. \end{cases}$$

Allora

$$\langle \sigma_0 \sigma_r \rangle_{\Lambda_n, \beta, h}^{\text{per}}$$

$$= \frac{\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^{n-r}}{\text{tr} A^n}$$

①

□ Per $h=0$: $A = \begin{pmatrix} e^\beta & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^\beta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} b & b^{-1} \\ b^{-1} & b \end{pmatrix}$

per scrivere meno.

Diagonalizzatore A : autovalori:

$$0 = \det(\lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - b & -b^{-1} \\ -b^{-1} & \lambda - b \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - b)^2 - b^{-2} = \lambda^2 - 2\lambda b + b^2 - b^{-2}.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4(b^2 - b^{-2})}}{2}$$

⑥

$$= b \pm \sqrt{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + b^{-2}} = b \pm b^{-1}. \quad \textcircled{1}$$

Auto stati:

$$\begin{pmatrix} e^b & e^{-b} \\ e^{-b} & e^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (e^b \pm e^{-b}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Soluzioni: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}.$

Per $\lambda_1 = b + b^{-1}$ l'autostato è $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

per $\lambda_2 = b - b^{-1}$ l'autostato è $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \textcircled{1}$

Per diagonalizzare si usa la matrice unitaria

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Allora

$$V^+ A V = \begin{pmatrix} b+b^{-1} & 0 \\ 0 & b-b^{-1} \end{pmatrix} =: D. \quad \textcircled{1}$$

Così otteniamo

$$\begin{aligned} \text{tr } A^n &= \text{tr } D^n = \text{tr} \begin{pmatrix} (b+b^{-1})^n & 0 \\ 0 & (b-b^{-1})^n \end{pmatrix} \\ &= (b+b^{-1})^n + (b-b^{-1})^n. \end{aligned}$$

(7)

e

$$\begin{aligned}
 & \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^{u-r} \\
 &= \text{tr} V^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} V \underbrace{V^+ A^r V}_{= (V^+ A V)^r} V^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} V V^+ A^{u-r} V \\
 &= (V^+ A V)^r \\
 &= D^r
 \end{aligned}$$

$$= \text{tr} V^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} V D^r V^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} V D^{u-r} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 V^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} V &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Allow

$$\begin{aligned}
 & \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^{u-r} \\
 &= \text{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b+b^{-1})^r & 0 \\ 0 & (b-b^{-1})^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} (b+b^{-1})^{u-r} & 0 \\ 0 & (b-b^{-1})^{u-r} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & (b-b^{-1})^r \\ (b+b^{-1})^r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (b-b^{-1})^{u-r} \\ (b+b^{-1})^{u-r} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$= \det \begin{pmatrix} (b-b^{-1})^r (b+b^{-1})^{u-r} & 0 \\ 0 & (b+b^{-1})^r (b-b^{-1})^{u-r} \end{pmatrix}$$

$$= (b-b^{-1})^r (b+b^{-1})^{u-r} + (b+b^{-1})^r (b-b^{-1})^{u-r}$$

(1)

Allora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^{u-r} / \det A^u$$

$$= \frac{(b-b^{-1})^r (b+b^{-1})^{u-r} + (b+b^{-1})^r (b-b^{-1})^{u-r}}{(b+b^{-1})^u + (b-b^{-1})^u}$$

