Fisica Matematica 3

Esercizi di Meccanica Quantistica – Settimana 3

Soluzione da consegnare entro **lunedì, 13/5/2024, 15:30** via email (scannerizzata o LaTeX) a Diwakar Naidu, diwakar.naidu@unimi.it

Problem 1: Esponenziale (3+4+2+4 punti)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Definiamo

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \, .$$

a. Dimostrare che la serie converge.

b. Dimostrare che $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ per ogni $s, t \in \mathbb{C}$.

c. Dimostrare che $e^A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è invertibile e ottenere una formula esplicita per l'inverso.

d. Trovate un esempio di matrici A e B per cui $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Commento: (non da dimostrare) Per il caso generale ci sono diverse versioni della formula BCH (Baker–Campbell–Hausdorff). Per esempio, se A e B entrambi commutano con $[A.B]$, vale

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \, .$$

Problem 2: Derivata (10 punti)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Una funzione $x : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ è derivabile in $t_0 \in \mathbb{R}$ se esiste un vettore $a \in \mathcal{H}$ tale che

$$\| \frac{1}{t - t_0} (x(t) - x(t_0)) - a \| \to 0 \quad (t \to t_0) \, .$$

In questo caso scriviamo $x'(t_0) := a$.

Sia $y \in \mathcal{H}$ e sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dimostrare che $x(t) := e^{tA} y$ è derivabile su $\mathbb{R}$ per ogni $y \in \mathcal{H}$, e $x'(t) = Ax(t)$.

Problem 3: Trasformata di Fourier (3+3+4 punti)

Usiamo la convenzione della trasformata di Fourier unitaria in L^2.

a. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$g(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

b. Dimostrare che per $f \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo

$$|\hat{f}(p)| \leq (2\pi)^{-d/2} \int |f(x)| \mathrm{d}x \qquad \forall p \in \mathbb{R} \, .$$

c. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia $a \in \mathbb{R}$, e definiamo la traslazione f_a di una funzione f come

$$f_a(x) := f(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

Calcolare $\hat{f}_a(p)$, dato $\hat{f}$.

Problem 4: Lemma 3.38 (10 punti)

Dimostrare Lemma 3.38 della lezione.