Fisica Matematica 3

Esercizi di Meccanica Quantistica – Settimana 5

Soluzione da consegnare entro **lunedì, 3/6/2024, 15:30** via email (scannerizzata o LaTeX) a Diwakar Naidu, diwakar.naidu@unimi.it

Problem 1: Rappresentazione di Spin $\ell = 1/2$ (10 punti)

Sia $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ e S_x, S_y, $S_z : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gli operatori di spin come definiti nel Capitolo 2 della lezione (allora una rappresentazione di $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ con $\ell = 1/2$).

Calcolare l'operatore che rappresenta una rotazione per $\theta = 2\pi$ su $\mathbb{C}^2$.

Problem 2: Indeterminazione di Heisenberg (4+6 punti)

Per $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ il principio di indeterminazione di Heisenberg dice che

$$\left(\int |x|^2 |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int \overline{\psi(x)} (-\Delta\psi(x)) \mathrm{d}x \right) \geq \frac{1}{4} \, .$$

a. Sia H l'operatore Hamiltoniano di idrogeno, $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|x|}$. Dimostrare che, per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle \psi, H\psi \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m} \left(\int |x|^2 |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{-1} - e^2 \int |x|^{-1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \, .$$

b. Dato un qualsiasi $C > 0$, trovare una funzione $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ normalizzata ($\|\psi\|_{L^2} = 1$) tale che il lato destro di questa disuguaglianza ha un valore minore di $-C$. (Allora il principio di indeterminazione di Heisenberg non è sufficiente per dimostrare la stabilità dell'idrogeno.)

Problem 3: Dilazioni (3+3+4 punti)

Sia $U(s)$ l'operatore di dilazione su $L^2(\mathbb{R}^3)$ definito come $(U(s)\psi)(x) = e^{-ns/2}\psi(e^{-s}x)$.

a. Dimostrare che $U(s)$ definisce un gruppo unitario fortemente continuo.

b. Calcolare il generatore di $U(s)$.

c. Sia $H = H_0 + V$ con $H_0 := -\Delta$ e $V = -\gamma/|x|$, $\gamma > 0$. Sia $H\psi = \lambda\psi$. Considerare il commutatore $[U(s), H]$ per ottenere una dimostrazione del Teorema del Viriale.

Problem 4: Momento angolare orbitale (6+4+3 punti)

Siano L_x, L_y, L_z gli operatori di momento angolare orbitale.

a. Verificare che, in coordinate sferiche,

$$\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\ .
\end{aligned}$$

b. Verificare che

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\ .$$

c. Verificare che $[H, L^2] = 0$ e $[H, L_z] = 0$ per $H = -\Delta + V(|x|)$, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.