

Fisica Matematica 3

Esercizi di Meccanica Quantistica – Settimana 6

Soluzione da consegnare entro **martedì, 11/6/2024, 13:30** via email (scannerizzata o \LaTeX) a Diwakar Naidu, diwakar.naidu@unimi.it

Problem 1: Buca di potenziale (2+2+2+4+2 punti)

Consideriamo l'equazione di autovalore in $L^2(\mathbb{R}^3)$ per l'operatore

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r),$$

dove $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ è il solito operatore di momento angolare, ed esistono $V, a > 0$ tale che il potenziale è

$$V(r) := \begin{cases} -W & \text{per } r < a \\ 0 & \text{per } r \geq a \end{cases}$$

- a. Usando l'ansatz $\psi(r, \theta, \phi) := \frac{u(r)}{r} Y_{m,\ell}(\theta, \phi)$, ottenere un'equazione per la funzione u .
- b. Trovare le soluzioni di questa equazione per $r < a$, con la condizione $u(0) = 0$ (per evitare una singolarità).
- c. Trovare le soluzioni di questa equazione per $r \geq a$, tale che la funzione rimane in $L^2(\mathbb{R}^3)$.
- d. Fissare i parametri delle due parti della funzione tale che u e u' sono continue in $r = a$ (se possibile). Trovare W_0 tale che per $W < W_0$ non ci sono autovettori, mentre per $W > W_0$ almeno un autovettore esiste.
- e. Per $W \rightarrow \infty$: il numero di autovettori rimane limitato?