La trasformata di Legendre:

<u>Definizione:</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.

La <u>trasformata di Legendre</u> è definita (per $p \in \mathbb{R}$ tale che il sup esiste finito) tramite:

$$f^*(p) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x)).$$

<u>Commento:</u> Ovviamente dipende solo da $p \in \mathbb{R}$.

<u>Lemma 1:</u> Se f è derivabile

$$f^*(p) = p\, x(p) - f(x(p))$$

dove $p := f'(x)$ definisce (per inversione) $x(p) = (f')^{-1}(p)$.

<u>Dimostrazione:</u>

Il sup viene trovato dove

$$0 = \frac{d}{dx}(px - f(x)) = p - f'(x).$$

$$\Leftrightarrow p = f'(x) \Leftrightarrow x = (f')^{-1}(p). \quad \blacksquare$$

<u>Esempio:</u> Se $f(x) := e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f^*(p) = p(\log(p) - 1)$, per $p \in [0, \infty$

<u>Lemma 2:</u> La trasformata di Legendre è un'involuzione: $f^{**} = f$.

②

Interpretazione: f^* contiene la stessa quantità di informazione di f, ma scritta in dipendenza della derivata f'.

Esercizio: Calcolare f^{**} per $f(x) = e^x$

Attenzione:

Se f non è convessa, f^{**} è l'inviluppo convesso, ovvero la più grande funzione convessa e semicontinua inferiormente tale che $f^{**} \leq f$.

Domanda: Perché le quantità termodinamiche sono convesse?

Per esempio per l'energia libera:

$$F(\beta) = -\beta^{-1} \log Z(\beta)$$

$$Z(\beta) = \int_{\Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}} \frac{dp\, dq}{N!} e^{-\beta H(p,q)} \quad ?$$

Commento: Si può anche leggere

$$Z(\beta) = \int_0^\infty dE\, \Omega(E)\, e^{-\beta E}$$ come

una trasformata di Laplace.

Il metodo di Laplace: idea generale: (3)

Sia f una funzione con massimo globale unico in x_0. Allora:

$$\int e^{Mf(x)}\,dx \overset{\text{Taylor}}{\approx} \int e^{M\left(f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right)}\,dx$$

$$= e^{Mf(x_0)} \underbrace{\int e^{+\frac{M}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}\,dx}_{\text{integrale Gaussiano finito, esplicitamente calcolabile}} .$$

$f''(x_0) < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{per noi:}\\ M \sim N \to \infty\end{array}}$$

<u>Teorema</u> (Laplace): Se f è C^2 e $f''(x_0) < 0$ nel unico massimo globale x_0!

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{Mf(x)}}{e^{Mf(x_0)}\sqrt{\dfrac{2\pi}{M\,|f''(x_0)|}}} = 1 .$$

<u>Regola "empirica"</u>: Se Z è la trasformata di Laplace di Ω, allora $\log Z$ è la trasformata di Legendre di $\log \Omega$, (almeno se il metodo di Laplace è applicabile.)

Esempio per il metodo di Laplace:

$$n! = \Gamma(n+1) \qquad \underline{\text{funzione Gamma}}$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \qquad \underline{\text{trasformata di Laplace}}$$

$$= \int_0^\infty e^{n\log(x) - x}\, dx$$

sostituzione $x = ny$

$$= e^{n\log n}\; n \int_0^\infty e^{n(\log y - y)}\, dy$$

adesso usare metodo di Laplace

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

formula di Stirling